UNIVERSIDAD DE GRANADA

FACULTAD DE CIENCIAS

Propuesta TFG. Curso 2025/2026

GRADO: Grado en Matemáticas

CÓDIGO DEL TFG: 270-022-2025/2026

1. DATOS BÁSICOS DEL TFG:

Título: Dual del espacio de las funciones continuas y Teorema de Banach-Stone

Descripción general (resumen y metodología):

El espacio C(K), de las funciones continuas sobre un espacio topológico compacto y Hausdorff K y con valores reales o complejos, equipado con la norma del supremo, es uno de los ejemplos clásicos de espacios de funciones estudiados en diversas áreas del Análisis Matemático y aparece en los orígenes mismos del Análisis Funcional.

El objetivo de esta propuesta es la revisión del Teorema de Banach-Stone para describir las isometrías (lineales) y sobreyectivas entre espacios de funciones C(K). Este resultado forma parte de las primeras contribuciones dentro del Análisis Funcional, la Teoría Espectral de Operadores y la Teoría de C*-álgebras. Son variadas las aplicaciones de este resultado en diversas ramas del Análisis Funcional. El primer objetivo de la propuesta consistirá en describir el espacio dual topológico de un espacio C(K), equipado con la norma del supremo, con el espacio de las medidas de Borel regulares sobre K y con otros espacios de funciones de variación acotada.

Una de las aplicaciones del Teorema de Banach-Stone, permite asegurar que las isometrías lineales sobreyectivas entre espacios C(K) verifican una propiedad de naturaleza algebraico-topológica: preservan funciones con soportes disjuntos, es decir, si dos funciones tiene producto cero sus imágenes verifican la misma propiedad. Sin embargo la clase de los operadores lineales continuos entre espacios C(K) que preservan funciones con soportes disjuntos es estrictamente más amplia que la clase de las isometrías lineales y sobreyectivas entre dichos espacios. El siguiente objetivo es la descripción de los operadores lineales y continuos que preservan funciones con producto cero como una extensión del Teorema de Banach-Stone.

En el ambiente de los espacios de funciones C(K), las isometrías sobreyectivas permiten dar ejemplos y describir las proyecciones contractivas y bi-contractivas sobre este tipo de espacios. Concretamente, si T es una isometría sobre C(K) con T^2 =Id, entonces el operador P=½ (Id + T) es una proyección bi-contractiva (es decir, || P ||= || Id-P || =1). Estudiar las proyecciones contractivas y bi-contractivas sobre espacios C(K) para demostrar que los espacios C(K) pertenecen a la clase de los espacios de Banach X donde toda proyección bicontractiva sobre X es de la forma P=½ (Id + T) para una cierta isometría T: C(K) → C(K) con T^2 =Id.

Tipología: Estudio de casos, teóricos o prácticos, relacionados con la temática del Grado.

Objetivos planteados:

Descripción del espacio dual topológico del espacio C(K) de las funciones continuas sobre un espacio topológico compacto Hausdorff K. Teoremas de Mazur-Ulam y Banach-Stone

Descripción de los operadores operadores lineales y continuos que preservan funciones con producto cero entre espacios C(K)

Operadores lineales lineales y continuos que preservan funciones con producto cero entre espacios de funciones continuas sobre espacios localmente compactos Hausdorff

Estudio de la proyecciones bi-contractivas sobre C(K)

Bibliografía básica:

John B. Conway, A Course in Functional Analysis, 2nd Edition, Springer-Verlag, 1990.

Fleming, R.J., Jamison, J. E., Isometries on Banach spaces: function spaces. Chapman & Hall/CRC Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, 129. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton,

FL, 2003.
Yaakov Friedman, Bernard Russo, Contractive projections on C0(K), Trans. Amer. Math. Soc. 273 (1982), no. 1, 57–73.
Yaakov Friedman, Bernard Russo, Conditional expectation and bicontractive projections on Jordan C*-algebras and their generalizations, Math. Z. 194 (1987), no. 2, 227–236.
Joram Lindenstrauss, Lior Tzafriri, Classical Banach spaces I and II, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1979.
Marshall H. Stone, Applications of the theory of boolean rings to General Topology, Trans. Amer. Math. Soc., 41 (1937), 375 – 481.

Recomendaciones y orientaciones para el estudiante:

Plazas: 1

2. DATOS DEL TUTOR/A:

Nombre y apellidos: ANTONIO MIGUEL PERALTA PEREIRA

Ámbito de conocimiento/Departamento: ANÁLISIS MATEMÁTICO

Correo electrónico: aperalta@ugr.es

3. COTUTOR/A DE LA UGR (en su caso):

Nombre y apellidos:

Ámbito de conocimiento/Departamento:

Correo electrónico:

4. COTUTOR/A EXTERNO/A (en su caso):

Nombre y apellidos:

Correo electrónico:

Nombre de la empresa o institución:

Dirección postal:

Puesto del tutor en la empresa o institución:

Centro de convenio Externo:

5. DATOS DEL ESTUDIANTE:

Nombre y apellidos: RICHARD WOLFENDALE CARO

Correo electrónico: richardwc@correo.ugr.es