UNIVERSIDAD DE GRANADA | FACULTAD DE CIENCIAS

Propuesta TFG. Curso 2025/2026

GRADO: Grado en Matemáticas

CÓDIGO DEL TFG: 270-051-2025/2026

1. DATOS BÁSICOS DEL TFG:

Título: Fortalecimientos de la (semi)primidad en álgebras a través de condiciones algebráicas y analíticas

Descripción general (resumen y metodología):

El propósito de este Trabajo Fin de Grado es llevar a cabo una detallada recopilación de varias clases de álgebras (posiblemente no asociativas) cuyo interés en la literatura radica en el hecho de que son "más que" (semi)primas. Recordemos que un álgebra A se dice ser semiprima si el ideal cero es el único ideal de A de cuadrado cero, y que un álgebra A se dice ser prima si A ≠ 0 y cualesquiera dos ideales de A distintos de cero tienen producto no cero. Los fortalecimientos de la (semi)primidad con los que trataremos vendrán dados a través de la imposición de condiciones que impliquen (semi)primidad, y que serán de naturaleza algebráica, o bien, en el caso de álgebras normadas, de naturaleza analítica.

Desde un punto de vista algebraico, una clase relevante es la de las álgebras multiplicativamente (semi)primas. Recordemos que el álgebra de multiplicación de un álgebra A, denotada por M(A), se define como la subálgebra del álgebra de todos los operadores lineales en A generada por el operador identidad y los operadores de multiplicación por la izquierda L_a y por la derecha R_a con a variando en A. Un álgebra A se dice ser multiplicativamente semiprima (respectivamente, multiplicativamente prima) cuando tanto A como su álgebra de multiplicación M(A) son álgebras semiprimas (respectivamente, primas). Sin disfrutar de su nombre, estas álgebras fueron estudiadas por primera vez por Jacobson [J] y Albert [A] en contexto finito-dimensional. Sin ninguna restricción sobre la dimensión, el estudio de estas álgebras se inició en la tesis doctoral de Mohammed [Mo]. Hoy día, estas álgebras cuentan con una teoría de estructura bien desarrollada, y sabemos que constituyen una muy amplia clase que contiene a todas las álgebras asociativas semiprimas (respectivamente, primas), a muchas álgebras semiprimas (respectivamente, primas) que son cercanas a las asociativas, y a todas las álgebras normadas anuladoras generalizadas (respectivamente, topológicamente simple) [CC, FR]. Recientemente, el interés en estas álgebras se ha visto incrementado enormemente gracias a que dichas álgebras han resultado ser el marco adecuado para la traslación a contexto no-asociativo de muchos resultados de las teorías PI y GPI asociativas [CFGM].

Como punto de partida en el estudio de fortalecimientos analíticos de la primidad consideraremos los trabajos de Mathieu [M1, M2, M3], donde se introducen las álgebras normadas asociativas ultraprimas, y se demuestra el hecho de que las C*-álgebras primas son ultraprimas. Combinando este hecho con el Teorema de clasificación (zelmanoviana) de las JB*-álgebras primas [FGR], se demuestra que las JB*-álgebras no-conmutativas primas son ultraprimas. Fue también probado por Mathieu que las álgebras asociativas complejas normadas ultraprimas son centralmente cerradas. La extensión de este resultado a contexto no-asociativo fue llevada a cabo en [CR1], donde se introdujeron las álgebras normadas ultraprimas (no-asociativas), y las álgebras normadas totalmente primas. Se demostró en [CR1] que las álgebras normadas ultraprimas son totalmente primas, y que las álgebras complejas normadas totalmente primas son centralmente cerradas.

Posteriormente, se introdujeron en [Mo, CM] las llamadas álgebras normadas totalmente multiplicativamente primas como aquellas algebras normadas que satisfacen el fortalecimiento normado natural de la multiplicativa primidad. Se demostró que las H*-álgebras topológicamente simples son totalmente multiplicativamente primas, y que las álgebras normadas totalmente multiplicativamente primas son totalmente primas.

Tipología: Estudio de casos, teóricos o prácticos, relacionados con la temática del Grado.

Objetivos planteados:

Un resumen de los contenidos podría venir dado por los siguientes epígrafes:
Álgebras (semi)primas, álgebras de cocientes, centroide extendido y clausura central.
Álgebras multiplicativamente (semi)primas.
Álgebras normadas ultraprimas.
Álgebras normadas totalmente primas y totalmente multiplicativamente primas.
Las actividades a desarrollar se centrarían en la ordenación de los resultados que conforman el contenido de este proyecto, analizando su complejidad y dependencia, así como la búsqueda y ordenación de las referencias bibliográficas que sean necesarias. Una guía para la elaboración de este proyecto sería la referencia [CR3], y el texto de apoyo en el que la mayor parte del contenido de este proyecto se encuentra desarrollado es el Volumen 2 del libro reciente [CR2].

Bibliografía básica:

[A] A. A. Albert, The radical of a non-associative algebra. Bull. Amer. Math. Soc. **48** (1942), 891--7.

[CC] J. C. Cabello and M. Cabrera, Structure theory for multiplicatively semiprime algebras. J. Algebra **282** (2004), 386--421.

[CFGM] M. Cabrera, A. Fernández, A. Yu. Golubkov, and A. Moreno, Algebras whose multiplication algebra is PI or GPI. J. Algebra **459** (2016), 2013--37.

[CM] M. Cabrera and A. A. Mohammed, Totally multiplicatively prime algebras. Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **132** (2002), 1145--62.

[CR1] M. Cabrera and Á. Rodríguez, Nonassociative ultraprime normed algebras. Quart. J. Math. Oxford **43** (1992), 1--7.

[CR2] M. Cabrera and Á. Rodríguez, Non-associative normed algebras. Volume 1: The Vidav-Palmer and Gelfand-Naimark Theorems, and Volume 2: Representation Theory and the Zel'manov Approach. Encyclopedia of Mathematics and Its Applications **154** and **167**. Cambridge University Press, 2014 and 2018.

[CR3] M. Cabrera and Á. Rodríguez, Multiplication algebras: algebraic and analytic aspects. The 3rd Moroccan Andalusian Meeting on Algebras and their Applications April 12-14, Chefchaouen, 2018.

[FGR] A. Fernández, E. García, and Á. Rodríguez, A Zel'manov prime theorem for JB*-algebras. J. London Math. Soc. **46** (1992), 319--35.

[FR] A. Fernández and Á. Rodríguez, A Wedderburn theorem for nonassociative complete normed algebras. J. London Math. Soc. **33** (1986), 328--38.

[J] N. Jacobson, A note on non-associative algebras. Duke Math. J. **3** (1937), 544--8.

[M1] M. Mathieu, Applications of ultraprime Banach algebras in the theory of elementary operators. PhD thesis, Tübingen 1986.

[M2] M. Mathieu, Rings of quotients of ultraprime Banach algebras, with applications to elementary operators. In R. J. Loy (ed.), Conference on Automatic Continuity and Banach Algebras (Canberra, 1989)}. Proc. Centre Math. Anal. Austral. Nat. Univ. **21**, Austral. Nat. Univ., Canberra, 1989. pp. 297--317.

[M3] M. Mathieu, Elementary operators on prime C*-algebras, I. Math. Ann. **284** (1989), 223--44.

[Mo] A. A. Mohammed, Álgebras multiplicativamente primas: visión algebraica y analítica. PhD thesis, Granada 2000.

Recomendaciones y orientaciones para el estudiante:

Se recomienda haber cursado las siguientes asignaturas:

Variable Compleja I y II
Análisis Funcional
Análisis Vectorial
Topología I y II
Álgebras, Grupos y Representaciones
Álgebra Moderna

Plazas: 1

2. DATOS DEL TUTOR/A:

Nombre y apellidos: MIGUEL CABRERA GARCÍA

Ámbito de conocimiento/Departamento: ANÁLISIS MATEMÁTICO

Correo electrónico: cabrera@ugr.es

3. COTUTOR/A DE LA UGR (en su caso):

Nombre y apellidos:

Ámbito de conocimiento/Departamento:

Correo electrónico:

4. COTUTOR/A EXTERNO/A (en su caso):

Nombre y apellidos:

Correo electrónico:

Nombre de la empresa o institución:

Dirección postal:

Puesto del tutor en la empresa o institución:

Centro de convenio Externo:

5. DATOS DEL ESTUDIANTE:

Nombre y apellidos:

Correo electrónico: