UNIVERSIDAD DE GRANADA

FACULTAD DE CIENCIAS

Propuesta TFG. Curso 2025/2026

GRADO: Grado en Matemáticas

CÓDIGO DEL TFG: 270-103-2025/2026

1. DATOS BÁSICOS DEL TFG:

Título: Título del trabajo: Principios Min-Max: el teorema de Lusternik-Schnirelmann

Descripción general (resumen y metodología):

Toda función regular definida sobre una variedad compacta alcanza su máximo y su mínimo globales y en particular, tiene al menos dos puntos críticos. No obstante, si se supone cierta complejidad adicional sobre la topología de la variedad, esta estimación puede quedarse corta. Por ejemplo, Lusternik y Schnirelmann demostraron que toda función definida sobre el toro T2 tiene, al menos tres puntos críticos. Este resultado se obtiene a partir de un principio min-max: minimizando el máximo de la función sobre la clase de subconjuntos con al menos una categoría determinada. Un paso importante en el procedimiento es un lema de deformación, que permita transformar unos conjuntos de subnivel en otros mientras la función no tenga puntos críticos entre ellos; esta construcción se basa en seguir el flujo gradiente (o pseudogradiente cuando no hay regularidad suficiente).

Por otra parte, el teorema de Borsuk-Ulam es un resultado bien conocido de Topología Algebraica que afirma que cualquier función continua f: Sn→Rn toma el mismo valor en alguna pareja de puntos antipodales. Este resultado es un ingrediente importante para la construcción del genus de Krasnoselskii, que a su vez puede usarse como herramienta fundamental para demostrar el teorema clásico de Lusternik-Schnirelmann sobre la multiplicidad de puntos críticos para funciones definidas en el espacio proyectivo.

Tipología: Trabajos bibliográficos sobre el estado actual de una temática relacionada con el Grado.

Objetivos planteados:

En este TFG se estudiará en primer lugar el concepto de categoría de Lusternik-Schnirelman. Posteriormente se estudiará el lema de deformación, y ello conducirá al teorema principal de Lusternik-Schnirelmann.

A continuación se estudiará en detalle el Teorema de Borsuk-Ulam y se usará para construir el genus de Krasnoselskii. Esto permitirá probar el teorema de Lusternik-Schnirelmann para funciones definidas en el proyectivo.

Bibliografía básica:

- Lusternik, L. and Schnirelmann, L., Méthodes Topologiques dans les Problèmes Variationnels, Hermann, Paris, 1934.
- Matoušek, J., Using the Borsuk-Ulam Theorem. Lectures on topological methods in combinatorics and geometry. Springer-Verlag, Berlin, 2003.
- Palais, R.S., Lusternik-Schnirelman theory on Banach manifolds. Topology 5 (1966), 115–132.
- Rabinowitz, P.H., Minimax Methods in Critical Point Theory with Applications to Differential Equations. CBMS Regional Conference Series in Mathematics, 65. American Mathematical Society, Providence, RI, 1986.
- Schwartz, J.T., Nonlinear Functional Analysis. Notes on Mathematics and its Applications. Gordon and Breach Science Publishers, New York-London-Paris, 1969.

Recomendaciones y orientaciones para el estudiante:

Se recomienda haber cursado y las asignaturas del grado: Análisis Matemático I y II, Ecuaciones Diferenciales I y II, Variedades Diferenciables

Plazas: 1

2. DATOS DEL TUTOR/A:

Nombre y apellidos: ANTONIO JESÚS UREÑA ALCÁZAR

Ámbito de conocimiento/Departamento: MATEMÁTICA APLICADA

Correo electrónico: ajurena@ugr.es

3. COTUTOR/A DE LA UGR (en su caso):

Nombre y apellidos:

Ámbito de conocimiento/Departamento:

Correo electrónico:

4. COTUTOR/A EXTERNO/A (en su caso):

Nombre y apellidos:

Correo electrónico:

Nombre de la empresa o institución:

Dirección postal:

Puesto del tutor en la empresa o institución:

Centro de convenio Externo:

5. DATOS DEL ESTUDIANTE:

Nombre y apellidos:

Correo electrónico: