UNIVERSIDAD DE GRANADA

FACULTAD DE CIENCIAS

Propuesta TFG. Curso 2026/2027

GRADO: Grado en Matemáticas

CÓDIGO DEL TFG: 270-104-2026/2027

1. DATOS BÁSICOS DEL TFG:

Título: Superficies mínimas en el espacio euclídeo

Descripción general (resumen y metodología):

En esta propuesta de TFG se pretende que el alumno adquiera experiencia en el manejo de algunas técnicas propias de la investigación en problemas relacionados con la teoría clásica de superficies mínimas. Se partirá del conocimiento del alumno en las siguientes materias del grado en matemáticas: Curvas y superficies y Variable compleja 1, Geometría global de curvas y superficies y Variedades diferenciables. Se manejarán principalmente tres fuentes: para los conceptos generales de curvas y superficies no tratados en el grado, el texto de M. do Carmo [1]; para los contenidos específicos sobre superficies mínimas, las notas [2] y [3].

El trabajo fin de grado comenzará estudiando grafos que minimizan el área, la ecuación de Euler-Lagrange para grafos mínimos y técnicas variacionales asociadas, para continuar con ejemplos clásicos de superficies mínimas como el helicoide, la catenoide, las superficies de Scherk y Enneper. Se estudiarán los teoremas de Euler de caracterización de la catenoide, de Scherk para caracterizar las superficies minimas de variable separada, y de Meusnier para caracterizar el helicoide entre las superficies mínimas regladas. A continuación se verán la primera fórmula de variación del área en un contexto más general, y la representación de Weierstrass como aplicación de la variable compleja a la teoría de superficies mínimas.

Se planificarán sesiones semanales de control con el tutor, a fin de que se logren los objetivos propuestos en el TFG.

Tipología: Trabajos bibliográficos sobre el estado actual de una temática relacionada con el Grado.

Objetivos planteados:

1. Estudiar el funcional área sobre grafos definidos en dominios del plano. Obtener la ecuación de los grafos mínimos como ecuación de Euler-Lagrange para este funcional (nivel de dificultad medio).
2. Analizar los ejemplos clásicos de superficies mínimas como el helicoide, la catenoide, las superficies de Scherk y

Enneper. Enunciar y demostrar los teoremas de Euler de caracterización de la catenoide entre las superficies de revolución que minimizan el área entre sus bordes, de Scherk para caracterizar la superficie de Scherk doblemente periódica entre las superficies mínimas de variable separada, y de Meusnier para caracterizar el helicoide entre las superficies mínimas regladas (nivel de dificultad medio).

3. Estudiar la primera fórmula de variación del área en el contexto de la geometría Riemanniana de subvariedades (nivel de dificultad alto).
4. Estudiar la representación de Weierstrass como método de construcción de superficies mínimas a partir de datos holomorfos, y calcular los objetos principales como la métrica, aplicación de Gauss o curvatura. Aplicar esto a los ejemplos estudiados en el punto 2 (nivel de dificultad alto).
5. Adicionalmente, se podrá incluir la programación de la representación de Weierstrass con el software Mathematica para producir imágenes de los ejemplos que aparezcan en el trabajo de fin de grado (nivel de dificultad medio).

Bibliografía básica:

[1] M. P. Do Carmo, Geometría de curvas y superficies, Alianza Universidad Textos, Madrid (1995).

[2] F. J. López y F. Martín, Complete minimal surfaces in R^3, Publicacions Matematiques, Vol. 43, No. 2, (1999) 341-449. https://www.ugr.es/~fmartin/dvi/survey.pdf
[3] J. Pérez, Minimal and constant mean curvature surfaces, (2019) https://wpd.ugr.es/~jperez/wordpress/wp-content/uploads/todoeng.pdf

Recomendaciones y orientaciones para el estudiante:

Es obligatorio haber cursado las asignaturas Curvas y superficies y Variable compleja 1. Se recomienda haber cursado las asignaturas Geometría global de curvas y superficies y Variedades diferenciables.

Plazas: 1

2. DATOS DEL TUTOR/A:

Nombre y apellidos: JOAQUÍN PÉREZ MUÑOZ

Ámbito de conocimiento/Departamento: GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA

Correo electrónico: jperez@ugr.es

3. COTUTOR/A DE LA UGR (en su caso):

Nombre y apellidos:

Ámbito de conocimiento/Departamento:

Correo electrónico:

4. COTUTOR/A EXTERNO/A (en su caso):

Nombre y apellidos:

Correo electrónico:

Nombre de la empresa o institución:

Dirección postal:

Puesto del tutor en la empresa o institución:

Centro de convenio Externo:

5. DATOS DEL ESTUDIANTE:

Nombre y apellidos: RAFAEL GUTIERREZ IBAÑEZ

Correo electrónico: rafaguti005@correo.ugr.es