UNIVERSIDAD DE GRANADA

FACULTAD DE CIENCIAS

Propuesta TFG. Curso 2026/2027

GRADO: Grado en Matemáticas

CÓDIGO DEL TFG: 270-091-2026/2027

1. DATOS BÁSICOS DEL TFG:

Título: El teorema de Douglas-Rado y sus extensiones a anillos y superficies de genero alto

Descripción general (resumen y metodología):

Este Trabajo Fin de Grado estudiará el problema de Plateau en su formulación paramétrica, con especial atención al teorema de Douglas–Radó para discos minimales. El objetivo principal es comprender cómo la minimización de la energía de Dirichlet, combinada con la relación entre armonicidad, conformalidad y área, permite obtener la existencia de discos minimales con borde prefijado.

El trabajo comenzará con una introducción histórica y matemática al problema de Plateau, desde su motivación geométrica hasta las soluciones clásicas de Douglas y Radó. A continuación se desarrollarán los preliminares necesarios: primera variación del área, energía de Dirichlet, mapas armónicos, desigualdad área-energía y papel de las parametrizaciones conformes.

La parte central del TFG estará dedicada a una exposición detallada del teorema de Douglas–Radó para discos. Se estudiará la clase admisible de aplicaciones del disco, la normalización de tres puntos del borde, la construcción de una sucesión minimizante, los argumentos de compacidad y el paso al límite que conduce a una solución armónica y conforme.

En una segunda parte se analizará la extensión del problema al caso anular mediante el criterio de Douglas, explicando el papel del módulo conforme del anillo y las posibles degeneraciones. Posteriormente se presentará, de forma más expositiva, la formulación correcta del problema para superficies de género alto, destacando la condición estricta que garantiza la existencia de minimizadores. Finalmente, se incluirá una sección breve sobre regularidad, puntos de rama y resultados clásicos asociados al problema de Plateau.

La metodología consistirá en la lectura guiada de las referencias principales, la reconstrucción detallada de las demostraciones fundamentales y la redacción progresiva de una memoria matemática rigurosa. Se realizarán reuniones periódicas con el tutor para revisar el avance del trabajo, aclarar los puntos técnicos y asegurar que el texto mantenga una línea argumental clara: del disco al anillo, y del anillo a superficies de topología superior.

Tipología: Estudio de casos, teóricos o prácticos, relacionados con la temática del Grado.

Objetivos planteados:

1. Comprender la formulación paramétrica clásica del problema de Plateau para discos con borde una curva de Jordan.
2. Estudiar la relación entre área, energía de Dirichlet, armonicidad y conformalidad en el contexto de superficies parametrizadas.
3. Demostrar la desigualdad área-energía y analizar el caso de igualdad para parametrizaciones conformes.
4. Presentar una demostración detallada del teorema de Douglas–Radó para discos minimales.
5. Entender el papel de la normalización del borde, las sucesiones minimizantes y los argumentos de compacidad en el método de Douglas–Radó.
6. Analizar el caso anular y explicar el criterio de Douglas, incluyendo el papel del módulo conforme y las degeneraciones posibles.
7. Exponer la formulación correcta del problema de Plateau en género alto, distinguiendo entre género exactamente fijado y género acotado.
8. Presentar de forma breve los resultados clásicos de regularidad, puntos de rama y extensiones del problema de Plateau a variedades riemannianas.

Bibliografía básica:

[1] J. Douglas, Solution of the problem of Plateau, Transactions of the American Mathematical Society 33 (1931), no. 1, 263–321.
[2] T. Radó, On Plateau's problem, Annals of Mathematics (2) 31 (1930), no. 3, 457–469.
[3] J. Douglas, Minimal surfaces of higher topological structure, Annals of Mathematics (2) 40 (1939), no. 1, 205–298.
[4] J. Douglas, The higher topological form of Plateau's problem, Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Serie II 8 (1939), 195–218.
[5] C. B. Morrey, Jr., The problem of Plateau on a Riemannian manifold, Annals of Mathematics (2) 49 (1948), 807–851.
[6] R. Osserman, A proof of the regularity everywhere of the classical solution to Plateau's problem, Annals of Mathematics (2) 91 (1970), 550–569.
[7] R. Gulliver and F. D. Lesley, On boundary branch points of minimizing surfaces, Archive for Rational Mechanics and Analysis 52 (1973), 20–25.
[8] B. White, Minimal Surfaces, lecture notes, notes by O. Chodosh and C. Mantoulidis, 2013.
[9] H. Hong, Lecture note on Minimal surfaces, course taught by A. Fraser, University of British Columbia, 2020.

Recomendaciones y orientaciones para el estudiante:

Se recomienda que el estudiante mantenga el TFG centrado en el problema de Plateau paramétrico y no lo mezcle con la teoría moderna de corrientes o con herramientas avanzadas de teoría geométrica de la medida. El núcleo del trabajo debe ser el método clásico de Douglas–Radó para discos y su extensión conceptual a dominios con topología no trivial.

El primer objetivo será entender con claridad la diferencia entre minimizar área y minimizar energía. Esta distinción es esencial: la energía de Dirichlet ofrece mejores propiedades analíticas, mientras que la conformalidad permite recuperar el problema geométrico de área. Por ello, el estudiante deberá cuidar especialmente la exposición de la desigualdad área-energía y la relación entre mapas armónicos conformes y superficies minimales.

El capítulo sobre el disco debe ser el más detallado de la memoria. En él conviene explicar con precisión la clase de aplicaciones admisibles, la normalización de tres puntos del borde, la construcción de sucesiones minimizantes, los resultados de compacidad que se usan y el paso al límite. Algunos lemas técnicos pueden citarse, pero la lógica de la prueba debe quedar escrita de forma clara y comprensible.

En el caso anular, es importante insistir en que aparece un nuevo fenómeno: el módulo conforme del anillo no está fijado de antemano. El estudiante deberá explicar por qué pueden producirse degeneraciones y cómo el criterio de Douglas evita que el minimizador se rompa en dos discos. Sería muy conveniente incluir el ejemplo de dos circunferencias paralelas y la aparición del catenoide como ilustración geométrica.

La parte de género alto y regularidad debe ser más breve y expositiva. No se espera una prueba completa de los resultados de Osserman, Gulliver–Lesley o Morrey, sino una explicación rigurosa de qué afirman y por qué completan la visión clásica del problema. Se valorará especialmente que el estudiante sepa distinguir entre resultados demostrados en el TFG y resultados citados como contexto avanzado.

Plazas: 1

2. DATOS DEL TUTOR/A:

Nombre y apellidos: JOSÉ MARÍA ESPINAR GARCÍA

Ámbito de conocimiento/Departamento: GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA

Correo electrónico: jespinar@ugr.es

3. COTUTOR/A DE LA UGR (en su caso):

Nombre y apellidos:

Ámbito de conocimiento/Departamento:

Correo electrónico:

4. COTUTOR/A EXTERNO/A (en su caso):

Nombre y apellidos:

Correo electrónico:

Nombre de la empresa o institución:

Dirección postal:

Puesto del tutor en la empresa o institución:

Centro de convenio Externo:

5. DATOS DEL ESTUDIANTE:

Nombre y apellidos: JUAN DIEGO JURADO CARRASCO

Correo electrónico: jdjurado@correo.ugr.es