UNIVERSIDAD DE GRANADA

FACULTAD DE CIENCIAS

Propuesta TFG. Curso 2026/2027

GRADO: Grado en Matemáticas

CÓDIGO DEL TFG: 270-097-2026/2027

1. DATOS BÁSICOS DEL TFG:

Título: Formas diferenciales y geometría global de superficies: de las ecuaciones de estructura al teorema de Gauss–Bonnet

Descripción general (resumen y metodología):

Este Trabajo Fin de Grado propone estudiar la geometría local y global de superficies desde el lenguaje de las formas diferenciales, siguiendo principalmente los capítulos 5 y 6 del texto de M. P. do Carmo, Differential Forms and Applications. El objetivo central es reformular resultados clásicos de la geometría de superficies mediante coframes ortonormales, formas de conexión y ecuaciones de estructura de Cartan, mostrando cómo este enfoque permite distinguir con claridad los aspectos intrínsecos y extrínsecos de la teoría.

El trabajo comenzará con un repaso breve de las nociones necesarias sobre formas diferenciales, derivada exterior, pull-back, integración y teorema de Stokes. A continuación se introducirán los marcos móviles sobre superficies orientadas, las formas de conexión y las ecuaciones de estructura. Este lenguaje permitirá deducir la curvatura gaussiana, el teorema egregium de Gauss, la curvatura geodésica y las fórmulas previas al teorema de Gauss–Bonnet.

La parte central del TFG estará dedicada al teorema de Gauss–Bonnet, primero en una versión local y posteriormente en su formulación global para superficies compactas orientables, incluyendo, si el desarrollo del trabajo lo permite, la versión con borde. Finalmente, se estudiará la relación entre curvatura, índice y topología mediante el teorema de Poincaré–Hopf y una introducción al teorema de Morse. Como epílogo, se podrá incluir una breve aplicación al diferencial de Hopf y al método del índice en superficies de curvatura media constante.

La metodología consistirá en la lectura guiada de las referencias principales, la reconstrucción detallada de las demostraciones fundamentales y la redacción progresiva de un texto matemático autónomo, riguroso y adaptado al nivel de un Trabajo Fin de Grado. Se realizarán reuniones periódicas de seguimiento con el tutor para revisar la comprensión de los resultados, la coherencia de la exposición y la calidad de la redacción matemática.

Tipología: Estudio de casos, teóricos o prácticos, relacionados con la temática del Grado.

Objetivos planteados:

1. Comprender el papel de las formas diferenciales en la geometría de superficies y su utilidad para expresar de forma natural conceptos como conexión, curvatura y orientación.
2. Estudiar las ecuaciones de estructura de Cartan para superficies y aplicarlas al cálculo de la curvatura gaussiana.
3. Analizar el teorema egregium de Gauss desde el punto de vista de las formas de conexión, destacando el carácter intrínseco de la curvatura gaussiana.
4. Estudiar la curvatura geodésica, los polígonos geodésicos y las fórmulas locales que conducen al teorema de Gauss–Bonnet.
5. Enunciar y demostrar el teorema de Gauss–Bonnet para superficies compactas orientables, comprendiendo el papel de la característica de Euler.
6. Introducir el índice de campos vectoriales o de líneas de direcciones con singularidades aisladas y relacionarlo con el teorema de Poincaré–Hopf.
7. Conectar el enfoque anterior con funciones de Morse y con la interpretación topológica de los puntos críticos.
8. Presentar, si el desarrollo del trabajo lo permite, una breve aplicación del método del índice al diferencial de Hopf en superficies de curvatura media constante.

Bibliografía básica:

[1] M. P. do Carmo, Differential Forms and Applications, Universitext, Springer, 1994.
[2] M. P. do Carmo, Riemannian Geometry, Birkhäuser, 1992.
[3] S. S. Chern, A simple intrinsic proof of the Gauss-Bonnet formula for closed Riemannian manifolds, Annals of Mathematics (2) 45 (1944), 747–752.
[4] H. Hopf, Differential Geometry in the Large, Lecture Notes in Mathematics 1000, Springer, 1983.
[5] J. W. Milnor, Topology from the Differentiable Viewpoint, Princeton University Press, 1997.
[6] J. Milnor, Morse Theory, Annals of Mathematics Studies 51, Princeton University Press, 1963.

Recomendaciones y orientaciones para el estudiante:

Se recomienda que el estudiante mantenga el trabajo centrado en la geometría de superficies y no lo convierta en una exposición general de formas diferenciales en variedades arbitrarias. Las formas diferenciales deben aparecer como una herramienta eficaz para comprender resultados geométricos concretos: ecuaciones de estructura, curvatura, teorema egregium, Gauss–Bonnet e índice.

El punto de partida será la lectura detallada de los capítulos 5 y 6 de do Carmo, complementada con referencias clásicas para los aspectos de geometría riemanniana, índice y teoría de Morse. El estudiante deberá reconstruir con cuidado las demostraciones principales, cuidando especialmente la notación, la orientación de los marcos, los signos en las ecuaciones de estructura y la interpretación geométrica de cada fórmula.

Conviene que el TFG avance de forma progresiva: primero el lenguaje de formas y coframes; después las ecuaciones de estructura y la curvatura; a continuación Gauss–Bonnet; y finalmente índice, Poincaré–Hopf y Morse. El capítulo final sobre el diferencial de Hopf, en caso de incluirse, deberá ser breve y expositivo, entendido como una aplicación moderna del mismo principio: un objeto diferencial, sus ceros, sus índices y una consecuencia global de rigidez.

Se valorará especialmente que el texto sea claro, autocontenido en lo esencial, con demostraciones bien ordenadas y ejemplos que ayuden a visualizar el contenido geométrico. No se espera una acumulación de resultados avanzados, sino una comprensión sólida y bien escrita de una línea conceptual coherente: de las ecuaciones de Cartan al teorema de Gauss–Bonnet y al método del índice.

Plazas: 1

2. DATOS DEL TUTOR/A:

Nombre y apellidos: JOSÉ MARÍA ESPINAR GARCÍA

Ámbito de conocimiento/Departamento: GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA

Correo electrónico: jespinar@ugr.es

3. COTUTOR/A DE LA UGR (en su caso):

Nombre y apellidos:

Ámbito de conocimiento/Departamento:

Correo electrónico:

4. COTUTOR/A EXTERNO/A (en su caso):

Nombre y apellidos:

Correo electrónico:

Nombre de la empresa o institución:

Dirección postal:

Puesto del tutor en la empresa o institución:

Centro de convenio Externo:

5. DATOS DEL ESTUDIANTE:

Nombre y apellidos: IRENE MARIN CASTILLA

Correo electrónico: irenemarcast@correo.ugr.es