UNIVERSIDAD DE GRANADA

FACULTAD DE CIENCIAS

Propuesta TFG. Curso 2026/2027

GRADO: Grado en Matemáticas

CÓDIGO DEL TFG: 270-096-2026/2027

1. DATOS BÁSICOS DEL TFG:

Título: Estudio de la conjetura de Toeplitz: métodos topológicos y geométricos en el problema del cuadrado inscrito

Descripción general (resumen y metodología):

Resumen

La Conjetura de Toeplitz, enunciada por Otto Toeplitz en 1911, es uno de los problemas abiertos más fascinantes y antiguos de la geometría plana. La conjetura afirma que toda curva de Jordan simple y cerrada en el plano contiene cuatro puntos que forman los vértices de un cuadrado.
A pesar de la aparente simplicidad de su enunciado, el problema permanece abierto en su caso general. Sin embargo, se han logrado avances significativos para curvas con ciertas propiedades de regularidad (curvas diferenciables, convexas, analíticas, etc.) utilizando herramientas avanzadas que conectan la geometría elemental con la topología algebraica (teoría de intersección, homología, superficies de Riemann) y la geometría simpléctica.
Este trabajo se justifica por la oportunidad de abordar un problema clásico de frontera que permite al estudiante consolidar y aplicar de manera transversal los conocimientos adquiridos a lo largo del Grado en Matemáticas en las áreas de Topología, Análisis Complejo y Geometría Diferencial, sirviendo además como introducción a la investigación matemática contemporánea.

Metodología

El plan de trabajo se estructurará en las siguientes fases cronológicas, adaptadas al calendario académico de la UGR:
Fase 1: Búsqueda y Lectura Bibliográfica. Estudio de textos clásicos de geometría de curvas y artículos científicos fundacionales.
Fase 2: Seminarios de Discusión. Reuniones periódicas con el tutor/a para desgranar los pasos lógicos de las demostraciones topológicas complejas (como el uso de la característica de Euler o el grado topológico).
Fase 3: Redacción del Núcleo Teórico. Elaboración de la memoria del TFG, cuidando el rigor formal en la exposición de las demostraciones seleccionadas.
Fase 4: Conclusiones y Generalizaciones. Redacción del estado actual del problema y las líneas de investigación abiertas en la última década.
Fase 5: Revisión y Preparación de la Defensa. Ajuste de la memoria a la normativa de formato de la UGR y diseño de la presentación para la exposición ante el tribunal.

Tipología: Estudio de casos, teóricos o prácticos, relacionados con la temática del Grado.

Objetivos planteados:

Objetivo General

Analizar el estado del arte de la Conjetura de Toeplitz, profundizando en las técnicas topológicas y geométricas que han permitido su resolución en familias específicas de curvas, y explorar las generalizaciones recientes del problema a otras figuras geométricas y espacios de mayor dimensión.

Objetivos Específicos

Revisión Histórica y Fundamentos: Estudiar la formulación original del problema y comprender la reducción topológica del problema al estudio de configuraciones en el toro o en el plano proyectivo.

Análisis de Casos Resueltos: Desarrollar detalladamente la demostración para curvas con regularidad suficiente (por ejemplo, el teorema de Shnirelman para curvas suaves o los avances de Vaughan).

Estudio de Técnicas Modernas: Comprender la reciente aproximación al problema mediante la geometría simpléctica, analizando las aportaciones de Terence Tao (2017) sobre el problema para curvas continuas integrables.

Generalizaciones (El Problema del Rectángulo): Estudiar el teorema de Meyerson y desarrollos posteriores que demuestran que toda curva de Jordan contiene los vértices de cualquier rectángulo de proporción dada.

Implementación e Ilustración Geométrica: Utilizar herramientas de software matemático (como SageMath o Mathematica) para visualizar las superficies de configuración asociadas a las curvas y la búsqueda de subvariedades de intersección.

Bibliografía básica:

1. **Falconer, K. J.** (1986). The Geometry of Fractal Sets. Cambridge University Press.
2. **Meyerson, M. D.** (1981). Every simple closed curve contains the vertices of a rectangle. Topology and its Applications, 12(2), 181-185.
3. **Shnirelman, L. G.** (1944). On certain geometric properties of closed curves. Uspekhi Mat. Nauk, 10, 34–44.
4. **Stromquist, W.** (1989). Inscribed squares and rectangles in Jordan curves. Geometric Dedicata, 32(2), 205-234.
5. **Tao, T.** (2017). An integration approach to the Toeplitz square peg problem. Forum of Mathematics, Sigma, Vol. 5. V
6. **Vaughan, H.** (1977). The Inscribed Square Problem. Semanario del Departamento de Matemáticas, Universidad de Illinois..

Recomendaciones y orientaciones para el estudiante:

Plazas: 1

2. DATOS DEL TUTOR/A:

Nombre y apellidos: MANUEL MARÍA RITORE CORTÉS

Ámbito de conocimiento/Departamento: GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA

Correo electrónico: ritore@ugr.es

3. COTUTOR/A DE LA UGR (en su caso):

Nombre y apellidos:

Ámbito de conocimiento/Departamento:

Correo electrónico:

4. COTUTOR/A EXTERNO/A (en su caso):

Nombre y apellidos:

Correo electrónico:

Nombre de la empresa o institución:

Dirección postal:

Puesto del tutor en la empresa o institución:

Centro de convenio Externo:

5. DATOS DEL ESTUDIANTE:

Nombre y apellidos: JAVIER IBAÑEZ MENA

Correo electrónico: jibanezm@correo.ugr.es