



UNIVERSIDAD
DE GRANADA



FACULTAD
DE CIENCIAS

Propuesta TFG. Curso 2026/2027

GRADO: Doble Grado en Física y
Matemáticas

CÓDIGO DEL TFG: 295-003-2026/2027

1. DATOS BÁSICOS DEL TFG:

Título: Cuando la simetría recupera la compacidad: una ecuación elíptica crítica invariante conforme

Descripción general (resumen y metodología):

El presente trabajo se centrará en el estudio de un resultado clásico de Wenyue Ding sobre una ecuación elíptica crítica invariante conforme. El objetivo principal será comprender cómo la invariancia conforme del problema permite reformularlo en la esfera y aprovechar sus simetrías para recuperar propiedades de compacidad que fallan en el espacio funcional natural debido a la presencia del exponente crítico de Sobolev. El artículo muestra, en particular, la existencia de infinitas soluciones de energía finita que cambian de signo, más allá de la familia clásica de soluciones positivas.

Como primer paso, el alumno estudiará los espacios de Sobolev, sus inmersiones y el papel especial del exponente crítico. A continuación, se introducirá la ecuación elíptica objeto de estudio, su formulación débil y el funcional variacional asociado. Esta parte permitirá entender la relación entre soluciones de la ecuación y puntos críticos del funcional de energía. Posteriormente, se analizará la invariancia conforme del problema y la reducción mediante la proyección estereográfica, que permite trasladar la ecuación del espacio euclídeo a la esfera. En este nuevo marco se estudiará cómo las simetrías de la esfera permiten considerar subespacios invariantes en los que se recuperan propiedades de compacidad suficientes para aplicar métodos variacionales. Finalmente, se reconstruirá de forma guiada la estrategia empleada por Ding para obtener una sucesión de soluciones distintas.

El trabajo se desarrollará mediante reuniones periódicas con el tutor, en las que se discutirán los avances, se resolverán dudas y se proporcionará el material bibliográfico necesario.

Tipología: Estudio de casos, teóricos o prácticos, relacionados con la temática del Grado.

Objetivos planteados:

Conocer los espacios de Sobolev y sus inmersiones, prestando especial atención al papel del exponente crítico. Familiarizarse con ecuaciones elípticas críticas en el espacio euclídeo y con la noción de solución de energía finita.

Comprender la invariancia conforme del problema y su relación con la proyección estereográfica entre $\mathbb{R}^n$ y la esfera S^n .

Estudiar la formulación variacional de la ecuación y la correspondencia entre soluciones débiles y puntos críticos del funcional asociado.

Analizar la pérdida de compacidad asociada al exponente crítico de Sobolev y comprender por qué el funcional no satisface directamente la condición de Palais-Smale.

Estudiar cómo las simetrías de la esfera permiten trabajar en subespacios invariantes donde se recuperan propiedades de compacidad. Reconstruir de forma guiada el argumento de Ding para obtener una sucesión de soluciones de energía finita que cambian de signo.

Bibliografía básica:

W. Ding, "On a conformally invariant elliptic equation on $\mathbb{R}^n$ ", Communications in Mathematical Physics 107 (1986), 331-335.

H. Brezis, Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations, Springer, 2011.

L. C. Evans, Partial Differential Equations, 2nd edition, American Mathematical Society, 2010.

M. Willem, Minimax Theorems, Birkhäuser, 1996.

Recomendaciones y orientaciones para el estudiante:

Para el adecuado seguimiento del trabajo, se recomienda que el estudiante haya cursado previamente asignaturas que proporcionen una base sólida en análisis, ecuaciones diferenciales y geometría. En particular, resultará especialmente conveniente haber cursado Modelos Matemáticos II, Análisis Funcional, Ecuaciones en Derivadas Parciales y Geometría Global de Curvas y Superficies.

Plazas: 1

2. DATOS DEL TUTOR/A:

Nombre y apellidos: RAFAEL LÓPEZ SORIANO

Ámbito de conocimiento/Departamento: ANÁLISIS MATEMÁTICO

Correo electrónico: ralopezs@ugr.es

3. COTUTOR/A DE LA UGR (en su caso):

Nombre y apellidos:

Ámbito de conocimiento/Departamento:

Correo electrónico:

4. COTUTOR/A EXTERNO/A (en su caso):

Nombre y apellidos:

Correo electrónico:

Nombre de la empresa o institución:

Dirección postal:

Puesto del tutor en la empresa o institución:

Centro de convenio Externo:

5. DATOS DEL ESTUDIANTE:

Nombre y apellidos:

Correo electrónico: