UNIVERSIDAD DE GRANADA

FACULTAD DE CIENCIAS

Propuesta TFG. Curso 2026/2027

GRADO: Grado en Matemáticas

CÓDIGO DEL TFG: 270-039-2026/2027

1. DATOS BÁSICOS DEL TFG:

Título: Teorema de Banach-Stone para isometrías sobreyectivas entre espacios C(K,X)

Descripción general (resumen y metodología):

El espacio C(K), de las funciones continuas sobre un espacio topológico compacto y Hausdorff K y con valores reales o complejos, equipado con la norma del supremo, es uno de los ejemplos clásicos de espacios de funciones estudiados en diversas áreas del Análisis Matemático y aparece en los orígenes mismos del Análisis Funcional.

El objetivo de esta propuesta es la revisión del Teorema de Banach-Stone para describir las isometrías (lineales) y sobreyectivas entre espacios de funciones continuas C(K,X) vector-valuadas en un espacio de Banach X. Este resultado forma parte de los contenidos básicos sobre isometrías dentro del análisis funcional, la teoría espectral de operadores y la teoría de C*-álgebras. Son variadas las aplicaciones de este resultado en diversas ramas del análisis funcional. El primer objetivo de la propuesta consistirá en describir el espacio dual topológico de un espacio C(K), equipado con la norma del supremo, con el espacio de las medidas de Borel regulares sobre K y con otros espacios de funciones de variación acotada.

Una de las aplicaciones del Teorema de Banach-Stone, permite asegurar que las isometrías lineales sobreyectivas entre espacios C(K) verifican una propiedad de naturaleza algebraico-topológica: preservan funciones con soportes disjuntos, es decir, si dos funciones tiene producto cero sus imágenes verifican la misma propiedad. Sin embargo la clase de los operadores lineales continuos entre espacios C(K) que preservan funciones con soportes disjuntos es estrictamente más amplia que la clase de las isometrías lineales y sobreyectivas entre dichos espacios. El siguiente objetivo es la descripción de las isometrías lineales y sobreyectivas entre dos espacios de la forma $C(K_1,X)$ y C(K2,Y) donde X e Y son espacios de Banach.

A diferencia del Teorema de Banach-Stone clásico, donde consideramos funciones continuas con valores escalares, ahora permitimos que nuestras funciones tomen valores en algún espacio de Banach. El objetivo es demostrar que una isometría lineal entre dos espacios de funciones continuas vector-valuadas de la forma $C(K_1,X)$ y C(K2,Y), donde X e Y son espacios de Banach, debe venir dada por alguna versión de la forma canónica presentada en el Teorema de Banach-Stone clásico como operador de composición con peso. A la vista del mencionado teorema, cabría esperar que los espacios K_1 y K_2 fueran necesariamente homeomorfos, pero esta conclusión no es siempre cierta. La extensión natural de la forma canónica del Teorema de Banach-Stone, es decir, la expresión de una isometría como un "operador de composición ponderado", consistiría en escribir el operador como una composición con operadores de ponderación. Así, para una isometría T de $C(K_1,X)$ en $C(K_2,Y)$, buscamos que T sea de la forma

(1) $T(f)(s) = V(s)(f(\varphi(t)))$, para todo $s \in K_2$,

donde φ es una función de K_2 en K_1 con ciertas propiedades de continuidad, y la aplicación $t \mapsto V(t)$ describe algún tipo de función continua de K_2 en el espacio de operadores lineales y acotados de X en Y.

Tipología: Estudio de casos, teóricos o prácticos, relacionados con la temática del Grado.

Objetivos planteados:

- Descripción del espacio dual topológico del espacio C(K) de las funciones continuas sobre un espacio topológico compacto Hausdorff K. Teoremas de Mazur-Ulam y Banach-Stone.

- Descripción de los operadores operadores lineales y continuos que preservan funciones con producto cero entre espacios C(K)
- Condiciones sobre los espacios de Banach X e Y que aseguran que toda isometría lineal e $C(K_1,X)$ en $C(K_2,Y)$ sea expresable de la forma deseada como un operador de composición con una variación continua de operadores lineales y continuos de X a Y. ¿Cuáles son las condiciones sobre la aplicación φ asociada al operador de composición y a la transformación $t \mapsto V(t)$ que esperamos que se cumplan? Propiedad de Banach-Stone. Propiedad de Banach-Stone fuerte. Propiedad de Banach-Stone débil. Conexiones con la convexidad estricta.
- Existen condiciones bajo las cuales un espacio Y sea universal en el sentido de que toda isometría lineal e $C(K_1,X)$ en $C(K_2,Y)$ sea de la forma deseada para cualquier X.
- ¿Qué se puede decir en el caso en que X = Y?

Bibliografía básica:

John B. Conway, A Course in Functional Analysis, 2nd Edition, Springer-Verlag, 1990.

Fleming, R.J., Jamison, J. E., Isometries on Banach spaces: function spaces. Chapman & Hall/CRC Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, 129. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2003.

Joram Lindenstrauss, Lior Tzafriri, Classical Banach spaces I and II, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1979.

Marshall H. Stone, Applications of the theory of boolean rings to General Topology, Trans. Amer. Math. Soc., 41 (1937), 375 – 481.

Recomendaciones y orientaciones para el estudiante:

Plazas: 1

2. DATOS DEL TUTOR/A:

Nombre y apellidos: ANTONIO MIGUEL PERALTA PEREIRA

Ámbito de conocimiento/Departamento: ANÁLISIS MATEMÁTICO

Correo electrónico: aperalta@ugr.es

3. COTUTOR/A DE LA UGR (en su caso):

Nombre y apellidos:

Ámbito de conocimiento/Departamento:

Correo electrónico:

4. COTUTOR/A EXTERNO/A (en su caso):

Nombre y apellidos:

Correo electrónico:

Nombre de la empresa o institución:

Dirección postal:

Puesto del tutor en la empresa o institución:

Centro de convenio Externo:

5. DATOS DEL ESTUDIANTE:

Nombre y apellidos: RICHARD WOLFENDALE CARO

Correo electrónico: richardwc@correo.ugr.es