UNIVERSIDAD DE GRANADA

FACULTAD DE CIENCIAS

Propuesta TFG. Curso 2026/2027

GRADO: Grado en Matemáticas

CÓDIGO DEL TFG: 270-035-2026/2027

1. DATOS BÁSICOS DEL TFG:

Título: Perturbación de operadores autoadjuntos casi conmutativos y sus aplicaciones

Descripción general (resumen y metodología):

Un famoso y clásico problema de la década de 1950, popularizado por Halmos, plantea conocer si cualquier par de matrices autoadjuntas y contractivas que casi conmutan (es decir, que la norma de su conmutador es pequeña) están en realidad cerca, en norma, de un par de matrices autoadjuntas que conmuta. Concretamente, ¿Es cierto que para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que, siempre que $n \in \mathbb{N}$ y tengamos dos matrices autoadjuntas $H, S \in M_n$ que cumplan $\|H\|, \|S\| \leq 1$ y $\|HS - SH\| < \delta$, existe un par de matrices autoadjuntas $H_1, S_1 \in M_n$ verificando: $\|H - H_1\| < \varepsilon$, $\|S - S_1\| < \varepsilon$ y $S_1 H_1 = H_1 S_1$? Es necesario notar que $\delta > 0$ no depende del natural $n \in \mathbb{N}$. Este problema fue resuelto afirmativamente por H. Lin en la década de 1990. Una prueba simplificada fue posteriormente obtenida por Friis y Rørdam.
Sin embargo, el problema correspondiente a tres matrices autoadjuntas contractivas que casi conmutan no siempre admite una respuesta positiva (Davidson'1985, Voiculescu'1983). Estos trabajos han motivado el estudio de matrices que casi conmutan, las cuales han encontrado aplicaciones en diversas áreas de las matemáticas, incluyendo las álgebras de operadores y la teoría de grupos, la física cuántica y la informática (véanse, por ejemplo, Loring-Sørensen'2016 y Enders-T. Shulman'2023). Más aún, el problema de aproximar un par de matrices unitarias que casi conmutan mediante matrices unitarias que conmutan tampoco admite una solución positive, tal como señaló Voiculescu en 1983. Más tarde, Exel y Loring encontraron en 1991, dos invariantes para pares de matrices unitarias que casi conmutan que permiten identificar aquellos pares que se mantienen alejados de los pares que conmutan. El primero de los invariantes, denotado por $k(U, V)$ para matrices unitarias $U, V \in M_n(\mathbb{C})$, involucra K-teoría, mientras que el segundo se definió mediante índices de alabeo (números de vueltas).

Tipología: Estudio de casos, teóricos o prácticos, relacionados con la temática del Grado.

Objetivos planteados:

- Analizar el Teorema de Lin para dos matrices autoadjuntas contractivas, verificando matemáticamente la existencia del parámetro que garantiza su proximidad en norma a un par conmutativo.
- Estudiar las limitaciones y contraejemplos del problema de conmutatividad aproximada, específicamente el caso de tres matrices autoadjuntas contractivas y el caso de pares de matrices unitarias (obstrucción de Voiculescu, Exel y Loring).
- Evaluar y comparar los dos invariantes estructurales para pares de matrices unitarias: el invariante espectral basado en K-teoría y el invariante geométrico basado en el índice de alabeo (winding number). Demostrar formalmente la equivalencia y coincidencia de ambos invariantes cuando la norma del conmutador es suficientemente pequeña. Establecer cotas superiores analíticas para el módulo del invariante de K-teoría, determinando así un límite cuantitativo para la obstrucción de la conmutatividad.
- Explorar las aplicaciones potenciales de estos resultados en áreas de frontera como las álgebras de operadores, la teoría de grupos, la computación cuántica y la física teórica.

Bibliografía básica:

K. R. Davidson, Almost commuting Hermitian matrices, Math. Scand., 56 (1985), 222–240.
D. Enders and T. Shulman, Almost commuting matrices, cohomology, and dimension, Ann. Sci. ´ Ec. Norm. Sup´er. (4), 56 (2023), 1653–1683.
P. Friis, M. Rørdam, Almost commuting self-adjoint matrices–a short proof of Huaxin Lin's theorem. J. Reine Angew. Math. 479, 121-131 (1996).
P. Friis, M. Rørdam, Approximation with normal operators with finite spectrum, and an elementary proof of a Brown-Douglas-Fillmore theorem. Pacific J. Math. 199, No. 2, 347-366 (2001).
P. R. Halmos, Some unsolved problems of unknown depth about operators on Hilbert space, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A, 76 (1976/77), 67–76.
H. Lin, Almost commuting self-adjoint matrices and applications, in: Operator Algebras and Their Applications, Fields Inst. Commun., 13, Amer. Math. Soc. (Providence, RI, 1997), pp. 193-233.
T. A. Loring and A. P. W. Sørensen, Almost commuting self-adjoint matrices: the real and self-dual cases, Rev. Math. Phys., 28 (2016), 1650017, 39 pp.
D. Voiculescu, Asymptotically commuting finite rank unitary operators without commuting approximants, Acta Sci. Math. (Szeged), 45 (1983), 429–431.

Recomendaciones y orientaciones para el estudiante:

Plazas: 1

2. DATOS DEL TUTOR/A:

Nombre y apellidos: ANTONIO MIGUEL PERALTA PEREIRA

Ámbito de conocimiento/Departamento: ANÁLISIS MATEMÁTICO

Correo electrónico: aperalta@ugr.es

3. COTUTOR/A DE LA UGR (en su caso):

Nombre y apellidos:

Ámbito de conocimiento/Departamento:

Correo electrónico:

4. COTUTOR/A EXTERNO/A (en su caso):

Nombre y apellidos:

Correo electrónico:

Nombre de la empresa o institución:

Dirección postal:

Puesto del tutor en la empresa o institución:

Centro de convenio Externo:

5. DATOS DEL ESTUDIANTE:

Nombre y apellidos: JOAQUIN GAVIRA LOPEZ

Correo electrónico: joaquingavira@correo.ugr.es