UNIVERSIDAD DE GRANADA

FACULTAD DE CIENCIAS

Propuesta TFG. Curso 2026/2027

GRADO: Grado en Matemáticas

CÓDIGO DEL TFG: 270-043-2026/2027

1. DATOS BÁSICOS DEL TFG:

Título: Unicidad de extensiones Hahn-Banach

Descripción general (resumen y metodología):

El teorema de Hahn-Banach es uno de los pilares del análisis funcional, conocido como uno de los tres principios del análisis funcional. La versión clásica del teorema de Hahn-Banach garantiza que cualquier funcional lineal y continuo definido sobre un subespacio cerrado M de un espacio de Banach E admite al menos una extensión lineal continua a todo el espacio E preservando la norma. Sin embargo, este teorema no asegura la unicidad de dicha extensión equinórmica. De hecho, la existencia de múltiples extensiones lineales de norma mínima es un fenómeno común estrechamente ligado a la geometría intrínseca de la norma del espacio.

Cuando un subespacio M admite infinitas extensiones preservando la norma para ciertos funcionales de su dual M*, se revela una falta de rigidez geométrica en la frontera de la bola unidad de E. Para formalizar y estudiar este tipo de fenómenos, R.R. Phelps (1960) introdujo y sistematizó las condiciones bajo las cuales las extensiones de Hahn-Banach son necesariamente únicas. Se dice que un subespacio cerrado M de un espacio normado E es Hahn-Banach smooth (suave en el sentido de Hahn-Banach) en E si cada funcional lineal continuo sobre M posee una única extensión preservando la norma a todo el espacio E. Geométricamente, esta noción de suavidad abstracta está íntimamente relacionada con propiedades fundamentales de la teoría de la aproximación óptima, donde la unicidad de la extensión equivale a la unicidad del elemento de mejor aproximación en subespacios reflexivos.

Otro problema relacionado con lo expuesto anteriormente plantea la validez de una versión débil* del teorema de Hahn-Banach que permita garantizar la extensión preservando la norma de funcionales débil*-continuos definidos sobre un subespacio débil* cerrado dentro de un espacio de Banach dual. Es conocido que la extensión con la misma norma no siempre es posible. Parece razonable encontrar condiciones que garanticen esta versión débil* del teorema de Hahn-Banach (este es el caso de las subálgebras debil* cerradas de las álgebras de von Neumann. , y posteriormente encontrar una caracterización geométrica de la unicidad de dichas extensiones.

En las últimas décadas, esta propiedad puramente geométrica ha demostrado ser un puente conceptual extraordinario al conectarse con la estructura algebraica de las álgebras de operadores. El interés actual radica en identificar qué subestructuras algebraicas naturales (como diversos tipos de ideales) heredan o imponen esta rigidez geométrica de unicidad, transitando desde los espacios complejos tradicionales hacia los escenarios reales recientemente descubiertos. Caracterizaciones de los ideales internos de C*-álgebras (reales y complejas) y JB*-triples como subtriples que son Hahn-Banach suaves. Revisitaremos los resultados obtenidos por Edwards y Rüttiman para C*-álgebras, álgebras de von Neumann y JB*-triples, junto a las conclusiones más recientes para C*-álgebras y JB*-triples reales obtenidas por Li, Peralta, Su y Zhang.

Tipología: Estudio de casos, teóricos o prácticos, relacionados con la temática del Grado.

Objetivos planteados:

- Estudio de la Unicidad de Extensiones (Suavidad): Analizar la noción de suavidad de Hahn-Banach (Hahn-Banach smoothness) en subespacios cerrados, fundamentada en los criterios geométricos clásicos de Phelps (1960). Conexiones con M-ideales, espacios de Hilbert, etc.
- Estudio de la verión débil* del teorema de Hahn-Banach para subespacios débil* cerrados, y analizar la noción de suavidad de Hahn-Banach (Hahn-Banach smoothness) para esta variante

débil*.

- Clasificación de Ideales Internos: Estudiar las caractrización algebriaco-geométrica de los ideales internos cerrados, en una conveniente topología, en C*-álgebras, álgebras de von Neumann y JB*-triples en términos de suavidad Hahn-Banach, siguiendo las aportaciones de Edwards y Rüttimann (1989, 1991, 1992).
- Extensión al ambiente real: evaluar los teoremas de estructura en C*-álgebras reales y JB*-triplas reales, analizando las similitudes y deivergencias con los resultados para estructuras complejas.

Bibliografía básica:

E.M. Alfsen, E.G. Effros, Structure in real Banach spaces, I and II, Ann. Math. (2) 96 (1972) 98--173.

L.J. Bunce, Norm preserving extensions in JBW*-triple preduals, Q. J. Math. 52 (2) (2001) 133--136.

C.M. Edwards, G.T. Rüttimann, Inner ideals in W*-algebras, Mich. Math. J. 36 (1) (1989) 147--159.

C.M. Edwards, G.T. Rüttimann, Inner ideals in C*-algebras, Math. Ann. 290 (1) (1991) 621--628.

C.M. Edwards, G.T. Rüttimann, A characterization of inner ideals in JB*-triples, Proc. Am. Math. Soc. 116 (4) (1992) 1049--1057.

P. Harmand, D. Werner, W. Werners, M-Ideals in Banach Spaces and Banach Algebras, Lect. Notes Math. Berlin, vol. 1547, Springer-Verlag, 1993.

L. Li, A.M. Peralta, S. Su, J. Zhang, Uniqueness of Hahn-Banach extensions and inner ideals in real C*-algebras and real JB*-triples. Journal of Algebra (2026), 700, 318-351.

R.R. Phelps, Uniqueness of Hahn-Banach extensions and unique best approximation, Trans. Am. Math. Soc. 95 (1960) 238--255.

S. Sakai, C*-Algebras and W*-Algebras, Ergeb. Math. Grenzgeb., vol. 60, Springer-Verlag, Berlin, 1971.

M.A. Smith, F. Sullivan, Extremely smooth Banach spaces, in: Banach Spaces Anal. Funct., Proc. Pelczynski Conf., Kent 1976, in: Lect. Notes Math., vol. 604, 1977, pp. 125--137.

R.R. Smith, J.D. Ward, M-ideal structure in Banach algebras, J. Funct. Anal. 27 (1978) 337--349.

F. Sullivan, Geometrical properties determined by the higher duals of a Banach space, Ill. J. Math. 21 (1977) 315--331.

Recomendaciones y orientaciones para el estudiante:

Plazas: 1

2. DATOS DEL TUTOR/A:

Nombre y apellidos: ANTONIO MIGUEL PERALTA PEREIRA

Ámbito de conocimiento/Departamento: ANÁLISIS MATEMÁTICO

Correo electrónico: aperalta@ugr.es

3. COTUTOR/A DE LA UGR (en su caso):

Nombre y apellidos:

Ámbito de conocimiento/Departamento:

Correo electrónico:

4. COTUTOR/A EXTERNO/A (en su caso):

Nombre y apellidos:

Correo electrónico:

Nombre de la empresa o institución:

Dirección postal:

Puesto del tutor en la empresa o institución:

Centro de convenio Externo:

5. DATOS DEL ESTUDIANTE:

Nombre y apellidos: ADRIAN GARCIA BARRAGAN

Correo electrónico: adrygarcia@correo.ugr.es