UNIVERSIDAD DE GRANADA

FACULTAD DE CIENCIAS

Propuesta TFG. Curso 2026/2027

GRADO: Grado en Matemáticas

CÓDIGO DEL TFG: 270-018-2026/2027

1. DATOS BÁSICOS DEL TFG:

Título: Aplicaciones que preservan ortogonalidad

Descripción general (resumen y metodología):

En un espacio de Hilbert H, la relación de ortogonalidad Euclídea entre dos de sus elementos x, y se define en términos del producto escalar mediante la condición (x,|y)=0. Dado que, por lo general, la norma de todo espacio normado no proviene de un producto escalar asociado en el sentido usual, la mencionada definición de ortogonalidad Euclídea no parece tener sentido más allá del ambiente de los espacios pre-Hilbertianos.

Es bien conocido que toda isometría lineal entre dos espacios de Hilbert preserva productos escalares y por tanto envía elementos ortogonales a elementos ortogonales. Esta observación nos permite introducir el siguiente concepto: Sea T una aplicación entre dos espacios de Hilbert H_1 y H_2. Diremos que T preserva ortogonalidad si envía elementos ortogonales en H_1 a elementos ortogonales en H_2. Cuando la ortogonalidad de elementos en el dominio es equivalente a la ortogonalidad entre sus imágenes decimos que T preserva ortogonalidad en ambas direcciones o que preserva ortogonalidad fuertemente. Lo primero es notar que existen aplicaciones no lineales que preservan ortogonalidad, y lo segundo que la aplicación nula preserva ortogonalidad.

El primer objetivo será identificar y describir las aplicaciones lineales no nulas que preservan (fuertemente) ortogonalidad entre espacios de Hilbert. Posteriormente identificar algunas aplicaciones de este resultado por ejemplo en la compatibilidad de varios productos escalares que comparten los mismos elementos ortogonales. El primer garn objetivo es revisar un Teorema de Chmieliński (2005) que establece lo siguiente: para una aplicación no nula T entre dos espacios pre-Hilbertianos las siguientes condiciones son equivalentes:

- T es una semejanza (es decir, es un múltiplo escalar positivo de una isometría lineal).
- T preserva el producto interno escalado por un factor positivo, es decir, existe un positivo r verificando (T(x)|T(y)) = r (x|y), para todo x,y.
- T es lineal y preserva ortogonalidad en ambas direcciones.
- T es lineal y preserva ortogonalidad (en una sola dirección).

Las equivalencias no se mantienen si se elimina la hipótesis de linealidad, ya que las aplicaciones que preservan la ortogonalidad pueden ser altamente no lineales y discontinuas.

Un segundo objetivo consistirá en el estudio de las aplicaciones lineales que "casi preserva ortogonalidad" (es decir, vectores perpendiculares en el dominio se transforman en vectores que son casi perpendiculares en el sentido de que su producto escalar es uniformemente pequeño con respecto al producto de las normas de los vectores originales). Tales aplicaciones son obligatoriamente inyectivas y continuas. Establecer, además, que una tal aplicación se comporta de manera muy cercana a una semejanza geométrica, e inversamente, si una aplicación (sea o no lineal) distorsiona el producto escalar solo dentro de un margen controlado, se vuelve automáticamente una función casi-lineal que preserva la ortogonalidad de forma aproximada. Resultados debidos a Chmieliński (2005).

Es conocido que la ortogonalidad Euclídea de dos elementos de un espacio pre-Hilbertiano real o complejo H puede ser caracterizada en términos de la norma, concretamente, dados $x,y\in H$, $x\perp y$ si y sólo si, $||x+\alpha y||\geqq||x||$ para todo $\alpha\in K$, con K representando al conjunto de los números reales o el conjunto de los números complejos. De esta manera, podemos definir un nuevo tipo de ortogonalidad, que llamaremos ortogonalidad de Bhirkoff-James, que se puede definir en todo espacio normado, y que es equivalente a la ortogonalidad Euclídea en espacios de Hilbert.

El siguiente objetivo será estudiar este nuevo tipo de ortogonalidad y compararla con la ortogonalidad Euclídea, además de estudiar sus propiedades básicas. Estudiar la relación entre la ortogonalidad de Bhirkoff-James y las aplicaciones lineales que la preservan. Es natural preguntar, si las isometrías lineales entre espacios normados preservan también la ortogonalidad. La respuesta es claramente sí. Es menos evidente si el recíproco es cierto. Es decir, si dada una aplicación lineal entre espacios normados que preserva la ortogonalidad de Bhirkoff-James, ¿Podemos afirmar que dicha aplicación es un múltiplo escalar positivo de una isometría? La respuesta a esa pregunta en espacios normados reales la encontraremos en el Teorema de Koldobsky. El siguiente paso natural es estudiar esta misma pregunta en espacios normados complejos. Esta cuestión es bastante más compleja que la anterior, y la resolveremos a través del famoso teorema de Blanco-Turnsek.
A diferencia del artículo anterior de Chmieliński (2005) que analizaba aplicaciones lineales que preservan ortogonalidad, en un trabajo reciente de Li, Liu y Peralta, se consideran hipótesis más débiles al asumir que la aplicación es únicamente aditiva. El primer resultado consiste en probar que para cualquier aplicación no nula A entre dos espacios pre-Hilbertianos complejos (con dimensión mayor o igual a 2) con imagen densa en norma, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- A es aditiva y preserva ortogonalidad (en ambas direcciones)
- A es complejo lineal o conjugado lineal y preserva ortogonalidad
- A es complejo lineal o conjugado lineal y existe una constante positiva r verificando que, para todo x en el dominio, la norma de T(x) es r veces la norma de x.

En realidad un trabajo posterior de los mismos autores permite caracterizar exactamente cuando una aplicación aditiva que preserva ortogonalidad se ve obligada a ser lineal o conjugada-lineal: Sea A una aplicación aditiva que preserva ortogonalidad entre dos espacios pre-Hilbertianos complejos de dimensión mayor o igual que dos. Entonces A es zero o un multiplo escalar positivo de una isometría real lineal. Además, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- A es complejo lineal o conjugado lineal
- Para todo x en el dominio, el elemento A(i x) pertenece al conjunto .
- Existe un elemento no nulo x en el dominio verificando que A(i x) pertenece al conjunto .
- Existe un elemento no nulo x en el dominio verificando que i A(x) pertenece a la imagen de A.

Tipología: Estudio de casos, teóricos o prácticos, relacionados con la temática del Grado.

Objetivos planteados:

- Revisitar el Teorema de Chmieliński que caracteriza las aplicaciones lineales que preservan ortogonalidad entre espacios pre-Hilbertianos.
- Estudio de la ortogonalidad de Bhirkoff-James.
- Estudio de las aplicaciones lineales no nulas que preservan ortogonalidad de Bhirkoff-James entre espacios normados reales.
- Estudio de las aplicaciones lineales no nulas que preservan ortogonalidad de Bhirkoff-James entre espacios normados.
- Estudio de las aplicaciones aditivas y no nulas que preservan ortogonalidad entre espacios pre-Hilbertianos complejos.

Bibliografía básica:

Birkhoff, G., Orthogonality in linear metric spaces. Duke Math. J. 1, 169–172, 1935.
Blanco, A.; Turnšek, A., On maps that preserve orthogonality in normed spaces, Proc. R. Soc. Edinb. A, 136, 709-716, 2006.

J. Chmielinski, Linear mappings approximately preserving orthogonality, J. Math. Anal. Appl. 304, no. 1 (2005), 158--169.
James, R. C., Orthogonality and linear functionals in normed linear spaces. Trans. Am. Math. Soc. 61, 265–292, 1947.
Koldobsky, A., Operators preserving orthogonality are isometries, Proc. R. Soc. Edinb. A, 123, 835-837, 1993.
Li, L., Liu, S., Peralta, A. M.. Additive mappings preserving orthogonality between complex inner product spaces. Linear Algebra and its Applications (2025), 710, 448–457.
Li, L., Liu, S., Peralta, A. M. An algebraic characterization of linearity for additive maps preserving orthogonality. Annals of Functional Analysis (2025) 16 (4), Artículo 62.

Recomendaciones y orientaciones para el estudiante:

Plazas: 1

2. DATOS DEL TUTOR/A:

Nombre y apellidos: ANTONIO MIGUEL PERALTA PEREIRA

Ámbito de conocimiento/Departamento: ANÁLISIS MATEMÁTICO

Correo electrónico: aperalta@ugr.es

3. COTUTOR/A DE LA UGR (en su caso):

Nombre y apellidos:

Ámbito de conocimiento/Departamento:

Correo electrónico:

4. COTUTOR/A EXTERNO/A (en su caso):

Nombre y apellidos:

Correo electrónico:

Nombre de la empresa o institución:

Dirección postal:

Puesto del tutor en la empresa o institución:

Centro de convenio Externo:

5. DATOS DEL ESTUDIANTE:

Nombre y apellidos: MATEO SAMUEL BURNE COLLADO

Correo electrónico: mateosamuelbc@correo.ugr.es