UNIVERSIDAD DE GRANADA

FACULTAD DE CIENCIAS

Propuesta TFG. Curso 2026/2027

GRADO: Grado en Matemáticas

CÓDIGO DEL TFG: 270-040-2026/2027

1. DATOS BÁSICOS DEL TFG:

Título: Teoremas de Gleason-Zelazko-Kahane y Kowalski-Slodkowski

Descripción general (resumen y metodología):

El Teorema de Gleason-Żelazko-Kahane es un resultado fundamental, sumamente elegante y útil, del análisis funcional y la teoría de álgebras de Banach. El teorema fue demostrado de forma independiente por Andrew Gleason (1967) para el caso conmutativo, y por Jean-Pierre Kahane y Wiesław Żelazko (1968) para el caso general. El enunciado es el siguiente:

Teorema de Gleason-Żelazko-Kahane: Sea A un álgebra de Banach compleja con elemento identidad e, y sea f un funcional lineal sobre A verificando que f(e) = 1. Entonces Las siguientes condiciones son equivalentes:

1. f es un funcional lineal multiplicativo (es decir, f(xy) = f(x) f(y), para todo x, y).
2. f no se anula en los elementos invertibles de A.
3. Para todo x en A, f(x) es un valor en el espectro de x.

(Nota: El espectro de un elemento x es el conjunto de números complejos μ tales que x -μ e no es invertible en el álgebra. Definición equivalente a la noción del conjunto de valores propios en matrices). Es interesante notar que el Teorema fundamental del Cálculo junto con el Teorema del valor medio de Lagrange permiten comprobar que la conclusión no es cierta para álgebras de Banach reales.

En el año 1980, los matemáticos polacos Kowalski y Słodkowski establecieron una generalización matemática brillante y profunda del Teorema de Gleason-Żelazko-Kahane. El Teorema de Gleason-Żelazko-Kahane es suficientemente sorprendente por reducir la multiplicatividad de un funcional a una condición espectral (pero asumiendo que la función es lineal), el Teorema de Kowalski-Słodkowski da un salto cualitativo al eliminar por completo el requisito de linealidad en las hipótesis.

Teorema de Kowalski-Słodkowski (1980): Sea A un álgebra de Banach compleja (no necesariamente conmutativa ni unital). Una función F de A en el cuerpo (atención: una función cualquiera, no un funcional lineal) es lineal y multiplicativa si, y solo si, cumple las siguientes dos condiciones para todo x, y en A:

1. F (0) = 0.
2. F(x) - F(y) pertenece al espectro del elemento x - y.

Existen extensiones fascinantes del Teorema de Kowalski-Słodkowski para aplicaciones entre álgebras de von Neumann (y C*-álgebras). Las diferentes extensiones de este resultado constituyen uno de los campos de investigación más activos en la teoría de álgebras de operadores. Notemos que una C*-álgebra es una generalización abstracta y no conmutativa del espacio de las funciones continuas complejas. Técnicamente, es un álgebra de Banach equipada con una operación de involución (*, que actúa como la matriz transpuesta conjugada) que cumple la el axioma de Gelfand-Naimark: $||x^*x|| = ||x||^2$. Las álgebras de von Neumann (introducidas originalmente por John von Neumann como anillos de operadores) son un tipo especial y mucho más restrictivo de C*-álgebras a la que se requiere ser espacios de Banach duales. Las C*-álgebras y las álgebras de von Neumannno son solo herramientas matemáticas abstractas; constituyen el lenguaje matemático riguroso sobre el cual se edifica la física cuántica moderna, específicamente la mecánica cuántica algebraica y la teoría cuántica de campos local.

Una aplicación (no necesariamente lineal) F desde un álgebra de von Neumann M a una C*-álgebra B se llama *-homomorfismo 2-local si para cada par de elementos x, y en M, existe un *-homomorfismo lineal y multiplicativo de M a B cuya evaluación en x e y coincide con la evaluación

de F en cada uno de estos puntos. La extensión del teorema de Kowalski-Słodkowski para álgebras de von Neumann, establecido por Burgos, Fernández, Garcés, y Peralta en 2014, cualquier aplicación que sea un *-homomorfismo 2-local (sin asumir linealidad ni continuidad previa) desde un álgebra de von Neumann a una C*-álgebra es automáticamente lineal y en realidad un *-homomorfismo global.

Tipología: Estudio de casos, teóricos o prácticos, relacionados con la temática del Grado.

Objetivos planteados:

- Entender y comprender el Teorema de Teorema de Gleason-Żelazko-Kahane y sus diferentes demostraciones que involucran teoría de funciones holomorfas. Aplicaciones del resultado en el estudio de las isometrías locales.
- Entender y comprender el Teorema de Kowalski-Słodkowski, su demostración y sus aplicaciones.
- Extensiones del Teorema de Kowalski-Słodkowski para álgebras de von Neumann.

Bibliografía básica:

Burgos, M., Fernández-Polo, F. J., Garcés, J. J., Peralta, A. M., A Kowalski–Slodkowski theorem for 2-local *-homomorphisms on von Neumann algebras. RACSAM (2015) 109 (2), 551–568.
Conway, J. B., A Course in Functional Analysis, 2nd ed., vol. 96. New York: Springer-Verlag, 1990.
Gleason, A. M.., A characterization of maximal ideals. Journal of the Analysis Mathematical (1967), 19(1), 171-172.
Kahane, J. P., Żelazko, W.. A characterization of maximal ideals in Banach algebras. Studia Mathematica (1968), 29(3), 339-343.
Kowalski, S., Słodkowski, Z.. A characterization of multiplicative linear functionals in Banach algebras. Studia Mathematica (1980), 67(3), 215–223.
Rudin, W., Functional Analysis, 2nd ed. New York: McGraw-Hill, 1991,
Żelazko, W.., A characterization of multiplicative linear functionals in Banach algebras. Studia Mathematica (1968), 30(3), 83-85.

Recomendaciones y orientaciones para el estudiante:

Plazas: 1

2. DATOS DEL TUTOR/A:

Nombre y apellidos: ANTONIO MIGUEL PERALTA PEREIRA

Ámbito de conocimiento/Departamento: ANÁLISIS MATEMÁTICO

Correo electrónico: aperalta@ugr.es

3. COTUTOR/A DE LA UGR (en su caso):

Nombre y apellidos:

Ámbito de conocimiento/Departamento:

Correo electrónico:

4. COTUTOR/A EXTERNO/A (en su caso):

Nombre y apellidos:

Correo electrónico:

Nombre de la empresa o institución:

Dirección postal:

Puesto del tutor en la empresa o institución:

Centro de convenio Externo:

5. DATOS DEL ESTUDIANTE:

Nombre y apellidos: ELOY ESPIGARES TAPIA

Correo electrónico: eloyespigares@correo.ugr.es