UNIVERSIDAD DE GRANADA

FACULTAD DE CIENCIAS

Propuesta TFG. Curso 2026/2027

GRADO: Doble Grado en Física y Matemáticas

CÓDIGO DEL TFG: 295-005-2026/2027

1. DATOS BÁSICOS DEL TFG:

Título: El espectro del laplaciano en dominios acotados: primer autovalor, principios variacionales y ley de Weyl

Descripción general (resumen y metodología):

Este Trabajo de Fin de Grado se centrará en el estudio de los autovalores del operador laplaciano en un dominio acotado, con condiciones de contorno de tipo Dirichlet. Este problema aparece de manera natural tanto en matemáticas como en física: desde el punto de vista físico, describe los modos propios de vibración de una membrana fijada en el borde; desde el punto de vista matemático, constituye un ejemplo fundamental de problema espectral asociado a un operador elíptico. El trabajo combinará herramientas de análisis funcional, espacios de Sobolev, teoría variacional y argumentos geométricos elementales.

La metodología consistirá, en primer lugar, en formular rigurosamente el problema en el marco débil, usando espacios de Sobolev adecuados y el cociente de Rayleigh asociado. A partir de la compacidad de ciertas inclusiones entre espacios funcionales, se obtendrá la existencia de una sucesión discreta de autovalores positivos que tienden a infinito. A continuación se estudiará la caracterización variacional de los autovalores mediante el principio min-max, que proporciona una herramienta fundamental para deducir propiedades cualitativas del espectro. En particular, se analizará el primer autovalor, su positividad y simplicidad, así como algunas consecuencias del principio variacional.

Una parte importante del trabajo estará dedicada al estudio de los dominios nodales de las autofunciones y a la demostración del teorema nodal de Courant, que relaciona el orden de un autovalor con el número máximo de componentes nodales de una autofunción asociada. Finalmente, se abordará la fórmula asintótica de Weyl para el problema de Dirichlet. Se presentará una demostración basada en el método de bracketing de Dirichlet-Neumann: primero se calculará la asintótica espectral en cubos mediante conteo de puntos de red, y después se aproximará el dominio general por familias de cubos interiores y exteriores. Esta estrategia permite obtener de manera relativamente elemental la ley que describe el crecimiento asintótico del número de autovalores en función del volumen del dominio. Como referencias principales se emplearán los textos de Brezis y Chavel, junto con el artículo clásico de Kac como motivación complementaria.

Tipología: Estudio de casos, teóricos o prácticos, relacionados con la temática del Grado.

Objetivos planteados:

El objetivo principal del trabajo es ofrecer una introducción rigurosa y coherente a la teoría espectral del laplaciano de Dirichlet en dominios acotados, poniendo especial énfasis en la relación entre los métodos variacionales, la estructura de las autofunciones y la distribución asintótica de los autovalores. Se pretende que el estudiante comprenda cómo un problema de ecuaciones en derivadas parciales puede formularse en términos funcionales y cómo el uso de espacios de Sobolev y operadores compactos permite obtener una teoría espectral discreta.

Un primer objetivo concreto será formular el problema de autovalores del laplaciano de Dirichlet en su forma débil y justificar la existencia de una base ortonormal de autofunciones en el espacio de funciones cuadrado integrables, asociada a una sucesión de autovalores positivos. Para ello será necesario revisar algunos resultados básicos de análisis funcional, como el teorema espectral para operadores compactos autoadjuntos y la compacidad de Rellich-Kondrachov. Un segundo objetivo será estudiar la caracterización variacional de los autovalores mediante el cociente de Rayleigh y el principio min-max. Esta parte permitirá deducir propiedades fundamentales del primer autovalor, en particular su caracterización como mínimo de la energía normalizada, la positividad de las autofunciones asociadas y la simplicidad del primer autovalor en dominios conexos.

Otro objetivo relevante será analizar la información geométrica contenida en las autofunciones. En este sentido, se estudiarán los conjuntos nodales y se demostrará el teorema nodal de Courant, mostrando cómo el principio min-max impone restricciones sobre el número de regiones nodales de una autofunción. Este resultado servirá además para reforzar la conexión entre la teoría espectral abstracta y la interpretación física de los modos de vibración.

Finalmente, se planteará como objetivo central la demostración de la fórmula de Weyl para el laplaciano de Dirichlet. Se buscará que el estudiante no solo conozca el enunciado, sino que comprenda una demostración completa en una versión clásica y accesible. La prueba se basará en el cálculo explícito del espectro en cubos, la interpretación del problema como conteo de puntos de red y el uso del bracketing de Dirichlet-Neumann para comparar el dominio dado con uniones finitas de cubos. Con ello se pretende mostrar que, a altas frecuencias, la distribución de los autovalores está determinada en primer orden por el volumen del dominio.

Bibliografía básica:

- H. Brezis, Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations, Springer.
- I. Chavel, Eigenvalues in Riemannian Geometry, Academic Press.
- M. Kac, “Can One Hear the Shape of a Drum?”, American Mathematical Monthly.

Recomendaciones y orientaciones para el estudiante:

Para abordar este trabajo con éxito, se recomienda que el estudiante comience revisando con cuidado los fundamentos de análisis funcional y espacios de Sobolev que intervienen en la formulación débil del problema. En particular, será importante manejar con soltura los espacios de funciones cuadrado integrables y los espacios de Sobolev de primer orden, así como la interpretación variacional de problemas elípticos. También conviene repasar los resultados básicos sobre operadores compactos autoadjuntos en espacios de Hilbert, ya que proporcionan el marco natural para entender por qué el problema espectral del laplaciano posee una sucesión discreta de autovalores y una base de autofunciones.

Una estrategia recomendable es avanzar desde los ejemplos explícitos hacia la teoría general. El caso del intervalo, el rectángulo o el cubo permite calcular autovalores y autofunciones de forma directa, y ofrece una intuición muy útil para entender tanto el principio min-max como la fórmula de Weyl. Estos ejemplos deben utilizarse no solo como ilustraciones, sino como una guía para interpretar los resultados abstractos. En particular, el cálculo del espectro en un cubo será esencial para la demostración de la ley de Weyl mediante bracketing.

En el desarrollo del trabajo será importante cuidar la distinción entre los distintos tipos de condiciones de contorno y el papel que juegan en las comparaciones espectrales. Aunque el objeto principal será el problema de Dirichlet, en la demostración de Weyl aparecerán condiciones de

Neumann auxiliares al introducir particiones del dominio en cubos. El estudiante deberá entender que estas condiciones no cambian el problema original, sino que se emplean como herramienta de comparación mediante el principio min-max. Esta es una de las ideas conceptualmente más importantes del trabajo.

Se recomienda además prestar atención a la estructura lógica de las demostraciones. El principio min-max debe presentarse como una herramienta central, de la que se derivan varias consecuencias: propiedades del primer autovalor, comparación de dominios, bracketing espectral y teorema nodal de Courant. De esta forma, el trabajo mantendrá una línea argumental clara y no será una mera colección de resultados. Como bibliografía principal se recomienda utilizar el libro de Brezis para los aspectos de análisis funcional y espacios de Sobolev, el libro de Chavel para la parte espectral y geométrica, y el artículo de Kac como lectura motivadora sobre la interpretación física y geométrica del espectro. Finalmente, se aconseja que el estudiante incluya ejemplos y, si es posible, algunas figuras sencillas de modos propios y dominios nodales, para reforzar la conexión entre los resultados analíticos y su interpretación física.

Plazas: 1

2. DATOS DEL TUTOR/A:

Nombre y apellidos: DAVID RUIZ AGUILAR

Ámbito de conocimiento/Departamento: ANÁLISIS MATEMÁTICO

Correo electrónico: daruiz@ugr.es

3. COTUTOR/A DE LA UGR (en su caso):

Nombre y apellidos:

Ámbito de conocimiento/Departamento:

Correo electrónico:

4. COTUTOR/A EXTERNO/A (en su caso):

Nombre y apellidos:

Correo electrónico:

Nombre de la empresa o institución:

Dirección postal:

Puesto del tutor en la empresa o institución:

Centro de convenio Externo:

5. DATOS DEL ESTUDIANTE:

Nombre y apellidos: DANIEL MEMBRIVES LOPEZ

Correo electrónico: dmembrives@correo.ugr.es