UNIVERSIDAD DE GRANADA

FACULTAD DE CIENCIAS

Propuesta TFG. Curso 2026/2027

GRADO: Grado en Matemáticas

CÓDIGO DEL TFG: 270-072-2026/2027

1. DATOS BÁSICOS DEL TFG:

Título: Movimiento browniano con perturbación determinista: del teorema de Cameron-Martin al problema de Kac

Descripción general (resumen y metodología):

Motivación

El movimiento browniano es uno de los procesos estocásticos más importantes de la matemática moderna. Se trata de un proceso en tiempo continuo que modela, entre otros fenómenos, el movimiento difusico idealizado de una partícula en un medio homogéneo. Aunque surgió como modelo físico para describir el movimiento irregular de partículas suspendidas en un fluido, con el tiempo se ha convertido en un objeto central en áreas como la probabilidad, el análisis, la teoría del potencial y la geometría fractal. Uno de sus rasgos matemáticos más característicos reside en que sus trayectorias son funciones continuas, pero presentan una alta irregularidad, hasta el punto de ser casi seguramente no diferenciables en ningún punto.

Una forma natural de estudiar la estabilidad de las propiedades del movimiento browniano consiste en modificar sus trayectorias añadiendo una función determinista. A primera vista, esta perturbación puede parecer sencilla, pero su efecto puede ser muy sutil. Bajo ciertas perturbaciones suficientemente regulares, en el sentido del teorema de Cameron-Martin, se conservan las propiedades casi seguras del movimiento browniano. Fuera de ese régimen regular, en cambio, pueden aparecer fenómenos nuevos, especialmente cuando la perturbación tiene una regularidad comparable a la del propio browniano. Esta escala de regularidad se refleja en la continuidad Hölder: casi seguramente, las trayectorias brownianas son alpha-Hölder para todo alpha<1/2, pero no son (1/2)-Hölder.

Una de las nociones de regularidad que aparece de forma natural en este contexto es, por tanto, la continuidad de Hölder. En particular, resulta natural preguntarse, por ejemplo, cómo puede influir la regularidad Hölder de la función añadida en propiedades del proceso perturbado, como la posibilidad de alcanzar —o evitar— puntos y conjuntos determinados, y si el exponente 1/2 marca una frontera entre regímenes distintos.

Este trabajo se plantea como una introducción a esta problemática. Su propósito es estudiar el movimiento browniano perturbado por una función determinista continua, prestando especial atención a cómo la irregularidad de dicha función puede influir en las propiedades de impacto del proceso resultante.

Contexto matemático

El punto de partida natural es el teorema de Cameron-Martin. Este resultado identifica una clase especial de funciones deterministas —aquellas que parten de cero, son absolutamente continuas y cuya derivada es de cuadrado integrable— para las cuales la ley del proceso perturbado es

equivalente a la ley del movimiento browniano original en el espacio de trayectorias. En consecuencia, ambos procesos comparten las mismas propiedades que ocurren con probabilidad uno, siempre que dichas propiedades puedan formularse como eventos medibles de la trayectoria.

Sin embargo, la situación cambia cuando la función determinista añadida es continua pero no pertenece a la clase regular descrita por Cameron-Martin. En ese caso, ya no se dispone de la equivalencia de medidas proporcionada por dicho teorema, y las propiedades del movimiento browniano no se transfieren automáticamente al proceso perturbado. Este es el régimen en el que surgen las preguntas más sutiles, y también las más difíciles de abordar.

Entre estas preguntas destacan las llamadas propiedades de impacto. Se trata de estudiar si la trayectoria del proceso perturbado puede alcanzar un punto concreto o un conjunto determinado. En el caso del movimiento browniano sin perturbación, este tipo de problemas está profundamente relacionado con la teoría del potencial, y con herramientas como la polaridad y la capacidad. Así, la cuestión central consiste en comprender cómo interactúan la irregularidad intrínseca del movimiento browniano, la regularidad de la función determinista y la estructura del conjunto que se quiere alcanzar.

Esta línea de estudio conecta con un problema clásico atribuido a M. Kac y estudiado por Le Gall, relativo a la probabilidad de que un movimiento browniano perturbado por una función determinista alcance un punto fijo o, equivalentemente, a que el movimiento browniano original alcance una curva determinista. En el caso planar de este problema, Le Gall probó que ciertas hipótesis de regularidad sobre la función perturbadora garantizan que dicha función sea polar; en particular, si la perturbación es Hölder con exponente estrictamente mayor que 1/2, el proceso perturbado evita el punto considerado casi seguramente. Por otro lado, Graversen construyó ejemplos que muestran que, por debajo del umbral Hölder 1/2, pueden aparecer fenómenos de impacto que no se dan en el régimen más regular. Más recientemente, Peres y Sousi han estudiado problemas relacionados con leyes cero-uno, probabilidades de impacto y dimensión de Hausdorff para el movimiento browniano perturbado por una función determinista. El presente trabajo tomará estos resultados como referencia para situar el problema en su contexto, exponer algunos de sus enunciados más representativos y discutir su significado.

No se pretende resolver en toda su generalidad un problema abierto, sino presentar el marco matemático en el que estas cuestiones se formulan, estudiar los resultados fundamentales que permiten entenderlo y analizar de forma crítica cómo se relacionan la regularidad de la perturbación y las propiedades de impacto del movimiento browniano.

Metodología

El desarrollo del trabajo se organizará en torno a los siguientes puntos:

- Localización y delimitación de un conjunto reducido de referencias principales, combinando textos de base sobre movimiento browniano con artículos especializados vinculados directamente al problema tratado.

- Lectura progresiva de dichas referencias, comenzando por los resultados fundamentales y avanzando después hacia formulaciones más específicas o técnicas.

- Elaboración de esquemas y notas de trabajo que permitan ordenar definiciones, hipótesis, resultados y ejemplos, con especial atención a la relación entre los distintos bloques teóricos.

- Selección del nivel de detalle adecuado para cada resultado, distinguiendo entre aquellos que se desarrollarán con mayor profundidad y aquellos que se presentarán como parte del contexto matemático.

- Redacción gradual de la memoria, revisando la coherencia entre las secciones para mantener un hilo argumental claro y evitar que las distintas secciones del texto aparezcan como contenidos independientes.

Tipología: Estudio de casos, teóricos o prácticos, relacionados con la temática del Grado.

Objetivos planteados:

- Adquirir una comprensión rigurosa del movimiento browniano como proceso estocástico fundamental, atendiendo tanto a sus propiedades probabilísticas básicas como a la regularidad de sus trayectorias.
- Comprender el papel de las perturbaciones deterministas del movimiento browniano y distinguir entre el caso regular, descrito por el teorema de Cameron-Martin, y situaciones más singulares en las que dicha herramienta deja de ser suficiente.
- Familiarizarse con algunas nociones básicas relacionadas con las probabilidades de impacto, la polaridad de conjuntos y la teoría del potencial, en la medida en que resulten necesarias para interpretar el problema considerado.
- Manejar bibliografía matemática especializada, discriminando entre resultados fundamentales que pueden presentarse de manera autocontenida y resultados más avanzados que conviene contextualizar dentro del estado del arte.
- Exponer con claridad un problema matemático actual o parcialmente abierto, identificando su motivación, sus formulaciones equivalentes o relacionadas, sus dificultades principales y algunas posibles líneas de desarrollo posterior.
- Integrar herramientas de distintas áreas —probabilidad, análisis funcional y teoría del potencial— para abordar un problema que, por su naturaleza, se sitúa en la intersección de varias disciplinas.

Bibliografía básica:

Graversen, S. E. “Polar-functions for Brownian motion”. Z. Wahrsch. Verw. Gebiete, 61(2):261–270, 1982.

Kuo, H.-H. Gaussian Measures in Banach Spaces. Springer, 1975.

Le Gall, J.-F. “Sur les fonctions polaires pour le mouvement brownien.” En Séminaire de Probabilités, XXII, Lecture Notes in Mathematics 1321, 186–189. Springer, 1988.

Le Gall, J.-F. Brownian Motion, Martingales, and Stochastic Calculus. Springer, 2016.

Mörters, P. y Peres, Y. Brownian Motion. Cambridge University Press, 2010.

Peres, Y. y Sousi, P. “Brownian motion with variable drift: 0-1 laws, hitting probabilities and Hausdorff dimension”. Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 153, 215–234, 2012.

Port, S. C. y Stone, C. J. Brownian Motion and Classical Potential Theory. Academic Press, 1978.

Recomendaciones y orientaciones para el estudiante:

Se requieren conocimientos previos sobre Probabilidad y Procesos Estocásticos, al nivel de las asignaturas correspondientes a estas materias que se imparten en el Grado en Matemáticas.

Plazas: 1

2. DATOS DEL TUTOR/A:

Nombre y apellidos: JOSÉ MIGUEL ANGULO IBÁÑEZ

Ámbito de conocimiento/Departamento: ESTADÍSTICA E INVESTIGACIÓN OPERATIVA

Correo electrónico: jmangulo@ugr.es

3. COTUTOR/A DE LA UGR (en su caso):

Nombre y apellidos:

Ámbito de conocimiento/Departamento:

Correo electrónico:

4. COTUTOR/A EXTERNO/A (en su caso):

Nombre y apellidos:

Correo electrónico:

Nombre de la empresa o institución:

Dirección postal:

Puesto del tutor en la empresa o institución:

Centro de convenio Externo:

5. DATOS DEL ESTUDIANTE:

Nombre y apellidos: PABLO RODRIGUEZ ALVAREZ

Correo electrónico: pablorodri99@correo.ugr.es