



1. DATOS BÁSICOS DEL TFG:

Título: Contextualidad cuántica y clásica en modelos de lenguaje: sheaves, embeddings y modelos probabilísticos

Descripción general (resumen y metodología):

Descripción general, resumen y metodología

Este Trabajo Fin de Grado estudiará la contextualidad cuántica y clásica en modelos de lenguaje desde una perspectiva matemática. La contextualidad es una propiedad fundamental en los fundamentos de la mecánica cuántica, pero también puede formularse de manera abstracta mediante modelos probabilísticos, teoría de sheaves, obstrucciones a secciones globales y marcos como Contextuality-by-Default.

El trabajo tomará como punto de partida estudios recientes que investigan la presencia de estructuras de contextualidad en modelos de lenguaje como BERT y otros modelos basados en embeddings. Se analizará cómo construir escenarios lingüísticos análogos a escenarios contextuales, cómo extraer distribuciones de probabilidad a partir de modelos de lenguaje, y cómo estudiar la relación entre compatibilidad contextual, distancias geométricas en espacios de embeddings y obstrucciones globales.

El objetivo no será afirmar que los modelos de lenguaje sean sistemas cuánticos físicos, sino estudiar qué estructuras matemáticas compartidas permiten aplicar herramientas de contextualidad cuántica y clásica a problemas de lenguaje natural, representación semántica y sistemas multiagente.

La propuesta se organiza en tres pistas independientes. Cada estudiante trabajará en una única pista, manteniendo un núcleo común: contextualidad sheaf-theoretic, modelos probabilísticos, embeddings, grafos de afinidad, reconstrucción contextual, programación científica y documentación reproducible.

Pistas posibles

Pista A · IOGame y agentes contextuales

Esta pista construirá un pequeño IOGame matemático donde agentes, neuronas o módulos cooperativos se representan como secciones locales. Cada agente tendrá información parcial y reglas de interacción. El objetivo será visualizar cuándo las secciones locales pueden componerse de forma consistente y cuándo aparece una obstrucción contextual.

La implementación podrá realizarse en Python mediante grafos, tablas probabilísticas, matrices de compatibilidad o una interfaz interactiva sencilla. El resultado esperado será un demostrador pequeño y reproducible que ilustre contextualidad como problema de composición local-global.

Pista B · Algoritmos CHIRP para reconstrucción contextual

Esta pista desarrollará algoritmos tipo CHIRP para reconstrucción contextual a partir de datos locales, embeddings, matrices de afinidad o señales discretas. El foco será reconstruir compatibilidades entre contextos, detectar obstrucciones y estudiar estabilidad frente a perturbaciones.

El trabajo podrá incluir grafos de contexto, clustering espectral, matrices de similitud, reconstrucción de relaciones locales y análisis de cuándo una familia de datos locales admite o no una interpretación global coherente.

Pista C · Algoritmos compiladores y Pauli Based Computation

Esta pista estudiará algoritmos de compilación inspirados en Pauli Based Computation, contextualidad, mediciones, reglas de compatibilidad y estructuras estabilizadoras. El objetivo será construir ejemplos pequeños donde reglas de medición, composición y actualización puedan

formalizarse como un lenguaje o compilador matemático.

El trabajo podrá conectar contextualidad, circuitos estabilizadores, mediciones de Pauli, modelos de computación por medición y algoritmos de compilación simbólica. La implementación será pequeña y controlada, con énfasis en reglas formales y ejemplos reproducibles.

Tipología: Estudio de casos, teóricos o prácticos, relacionados con la temática del Grado.

Objetivos planteados:

Objetivos planteados

1. Introducir la contextualidad como estructura matemática más allá de su origen cuántico.
2. Estudiar formalismos para contextualidad con posible señalización, incluyendo modelos sheaf-theoretic y Contextuality-by-Default.
3. Revisar cómo los modelos de lenguaje producen embeddings, distribuciones contextuales y representaciones geométricas de similitud.
4. Analizar la relación entre similitud semántica, distancia euclídea, compatibilidad contextual y grado de contextualidad.
5. Definir una arquitectura matemática común basada en contextos, secciones locales, restricciones de compatibilidad y obstrucciones globales.
6. Construir un ejemplo computacional pequeño y reproducible en una de las tres pistas: IOGame, CHIRP o compilador inspirado en Pauli Based Computation.
7. Representar los datos mediante grafos, tablas probabilísticas, embeddings, matrices de afinidad o reglas de medición.
8. Estudiar compatibilidad local y existencia o no existencia de secciones globales.
9. Implementar un prototipo mínimo reproducible en Python.
10. Documentar el modelo mediante pseudocódigo, diagramas, ejemplos pequeños y guía de ejecución.
11. Delimitar cuidadosamente el uso de lenguaje cuántico: no se afirma que los modelos de lenguaje sean sistemas cuánticos físicos.
12. Conectar el trabajo con contextualidad sheaf-theoretic, Contextuality-by-Default y contextualidad como recurso.
13. Preparar una memoria matemática con definiciones, ejemplos, cálculos, discusión crítica, bibliografía comentada y documentación del prototipo.

Bibliografía básica:

Bibliografía básica

Kin Ian Lo, Mehrnoosh Sadrzadeh and Shane Mansfield, "Quantum-Like Contextuality in Large Language Models", arXiv:2412.16806, 2024. DOI: 10.48550/arXiv.2412.16806.

Kin Ian Lo, Mehrnoosh Sadrzadeh and Shane Mansfield, "A Model of Anaphoric Ambiguities using Sheaf Theoretic Quantum-like Contextuality and BERT", EPTCS 366, 2022, pp. 23-34.

Kin Ian Lo, Mehrnoosh Sadrzadeh and Shane Mansfield, "Generalised Winograd Schema and its Contextuality", EPTCS 384, 2023, pp. 187-202.

Kin Ian Lo, Mehrnoosh Sadrzadeh and Shane Mansfield, "Developments in Sheaf-Theoretic Models of Natural Language Ambiguities", EPTCS 408, 2024, pp. 62-72.

Samson Abramsky and Adam Brandenburger, "The sheaf-theoretic structure of non-locality and contextuality", New Journal of Physics 13, 113036, 2011.

Samson Abramsky, Shane Mansfield and Rui Soares Barbosa, "The Cohomology of Non-Locality and Contextuality", EPTCS 95, 2012, pp. 1-14.

Samson Abramsky, Rui Soares Barbosa, Kohei Kishida, Raymond Lal and Shane Mansfield, "Contextuality, Cohomology and Paradox", CSL 2015.

Samson Abramsky, Rui Soares Barbosa, Martti Karvonen and Shane Mansfield, "A comonadic view of simulation and quantum resources", LICS 2019.

Rui Soares Barbosa, Martti Karvonen and Shane Mansfield, "Closing Bell: Boxing black box simulations in the resource theory of contextuality", in Samson Abramsky on Logic and Structure in

Computer Science and Beyond, Springer, 2023.

Ehtibar Dzhafarov and Janne Kujala, works on Contextuality-by-Default.

Jacob Devlin, Ming-Wei Chang, Kenton Lee and Kristina Toutanova, "BERT: Pre-training of Deep Bidirectional Transformers for Language Understanding", arXiv:1810.04805, 2018.

Ashish Vaswani et al., "Attention Is All You Need", NeurIPS 2017.

Ying Wang, Mengye Ren and Andrew Gordon Wilson, "In-Context Clustering with Large Language Models", arXiv:2510.08466, 2025.

Jara Bermejo-Vega, Nicolas Delfosse, Dan E. Browne, Cihan Okay and Robert Raussendorf, "Contextuality as a resource for models of quantum computation on qubits", Physical Review Letters 119, 120505, 2017.

Robert Raussendorf, Dan E. Browne, Nicolas Delfosse, Cihan Okay and Jara Bermejo-Vega, "Contextuality and Wigner-function negativity in qubit quantum computation", Physical Review A 95, 052334, 2017.

Nicolas Delfosse, Cihan Okay, Jara Bermejo-Vega, Dan E. Browne and Robert Raussendorf, "Equivalence between contextuality and negativity of the Wigner function for qudits", New Journal of Physics 19, 123024, 2017.

Jara Bermejo-Vega and Maarten Van den Nest, "Classical simulations of Abelian-group normalizer circuits with intermediate measurements", Quantum Information and Computation 14, 0181-0216, 2014.

Jara Bermejo-Vega, C. Y. Y. Lin and Maarten Van den Nest, "Normalizer circuits and a Gottesman-Knill theorem for infinite-dimensional systems", arXiv:1409.3208, 2014.

Jara Bermejo-Vega and K. C. Zatloukal, "Abelian hypergroups and quantum computation", arXiv:1509.05806, 2015.

Recomendaciones y orientaciones para el estudiante:

Recomendaciones

Es recomendable tener interés en álgebra lineal, probabilidad, grafos, lógica, fundamentos de computación cuántica, modelos de lenguaje y programación científica básica. El trabajo es adecuado para una estudiante o un estudiante de Matemáticas con interés en estructuras probabilísticas, modelos contextuales, teoría de sheaves, embeddings, algoritmos de reconstrucción y aplicaciones matemáticas a inteligencia artificial.

No es necesario dominar todas las herramientas desde el inicio. Cada estudiante trabajará en una única pista, con objetivos acotados y metodología ajustada al alcance de un TFG.

Plazas: 3

2. DATOS DEL TUTOR/A:

Nombre y apellidos: JARA JUANA BERMEJO VEGA

Ámbito de conocimiento/Departamento: FÍSICA DE LA MATERIA CONDENSADA

Correo electrónico: jbermejovega@ugr.es

3. COTUTOR/A DE LA UGR (en su caso):

Nombre y apellidos:

Ámbito de conocimiento/Departamento:

Correo electrónico:

4. COTUTOR/A EXTERNO/A (en su caso):

Nombre y apellidos:

Correo electrónico:

Nombre de la empresa o institución:

Dirección postal:

Puesto del tutor en la empresa o institución:

Centro de convenio Externo:

5. DATOS DEL ESTUDIANTE:

Nombre y apellidos:

Correo electrónico: